

ENS RENNES

École Normale Supérieure de Rennes

RAPPORT DE STAGE DE MATHÉMATIQUES DE L3

effectué à l'IMJ-PRG

03 mai 2021 - 28 mai 2021, 4 semaines

Représentations de Carquois

Calcul de représentations indécomposables par le théorème de Gabriel

Brian Flanagan

1ère année, magistère de mathématiques de l'ENS Rennes

**Institut de Mathématiques de
Jussieu-Paris Rive Gauche**
Université Paris Cité - Campus des Grands
Moulins
8 Place Aurélie Nemours
75205 Paris Cedex 13

Encadrant à l'IMJ-PRG
Baptiste Rognerud
Enseignant-Chercheur

Table des matières

1	Premières définitions	1
1.1	Les carquois et leurs représentations	1
1.2	La catégorie des représentations $\text{Rep}_k(Q)$	2
1.3	L'algèbre des chemins	4
1.4	Sommes directes de représentations	6
2	Foncteurs de réflexion et de Coxeter	9
2.1	Forme d'Euler et réflexions	9
2.2	Foncteurs de réflexion	10
2.3	Foncteurs de Coxeter	13
2.4	Représentations préprojectives et préinjectives	15
3	Graphes finis	16
3.1	Graphes de Dynkin et euclidiens	16
3.2	Forme de Tits et systèmes de racines	18
4	Théorèmes de Gabriel et calculs d'indécomposables	21
4.1	Le cas Dynkin	21
4.2	Le cas Euclidien	23
5	Annexes	26
5.1	Un peu de théorie des catégories	26
5.2	Code Python	27
	Bibliographie	28

Nous allons étudier la théorie des carquois, et plus particulièrement leurs représentations, comme on peut étudier les représentations (linéaires) d'un groupe. Nous définirons tout d'abord ces concepts, et un certain nombre de caractéristique de la structure associée, que l'on peut notamment voir comme une catégorie, équivalente à la catégorie des modules à gauche sur une certaine algèbre. L'objectif de ce rapport est d'aboutir à une première classification des carquois, donnée par les théorèmes de Gabriel. Ces théorèmes nous permettront d'une part de classifier les carquois en fonction de leur nombre classes d'isomorphismes de représentations dites "indécomposables", mais aussi de calculer explicitement dans certains cas ces classes d'isomorphismes.

1 Premières définitions

1.1 Les carquois et leurs représentations

Définition 1.1.1 (Carquois) Un carquois Q est la donnée d'un ensemble de sommets Q_0 , d'un ensemble d'arêtes Q_1 et de deux fonctions $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$, représentant respectivement la source et l'arrivée d'une arête.

Exemple 1.1.2

— Le carquois de Jordan :

$$Q_0 = \{1\}, Q_1 = \{\alpha\} \text{ et } s(\alpha) = t(\alpha) = 1$$

— Le carquois de Kronecker :

$$Q_0 = \{1, 2\}, Q_1 = \{\alpha, \beta\}, s(\alpha) = s(\beta) = 1 \text{ et } t(\alpha) = t(\beta) = 2$$

— **On se restreindra à l'étude des carquois finis** (c'est-à-dire dont le nombre de sommets est fini), mais il existe des carquois infinis :

$$Q_0 = \mathbb{N}, Q_1 = \{\alpha_k \mid k \in \mathbb{N}\}, s(\alpha_k) = k \text{ et } t(\alpha_k) = k + 1$$

Remarque.

- Les carquois ne sont autre que des graphes orientés, où l'on accepte les arêtes multiples et les boucles.
- On notera les chemins dans nos carquois en suivant une notation de concaténation en cohérence avec celle de composition des applications. Dans un carquois $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$, étant donné une suite d'arêtes $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ telles que $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$, on notera $\alpha_r \cdots \alpha_1$ le chemin suivant ces arêtes (et non $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ comme cela peut-être fait habituellement).

Dans la suite, on se donne un corps k fixé quelconque.

Définition 1.1.3 (Représentation de carquois) Soit $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carquois.

- i. Une (k) -représentation de Q est une famille $X = (X_i, X_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ telle que les X_i sont des k -espaces vectoriels et les X_α des applications linéaires de $X_{s(\alpha)}$ dans $X_{t(\alpha)}$.
Lorsque les X_i sont tous de dimension finie, on dit que la représentation est de dimension finie, et on appellera vecteur dimension et on notera $\dim(X)$ le vecteur de \mathbb{Z}^{Q_0} tel que $\dim(X)_i = \dim(X_i)$.
- ii. Une sous-représentation de X est une représentation $Y = (Y_i, Y_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ telle que les Y_i sont des sous-espaces vectoriels des X_i et les Y_α coïncident avec les X_α sur $Y_{s(\alpha)}$.
- iii. Une représentation de Q est dite irréductible (ou simple) si elle est non nulle (les espaces et les applications ne sont pas tous nuls) et n'admet pas de sous-représentation autre qu'elle-même et la représentation nulle.

Exemple 1.1.4 Étant donné un carquois Q et un sommet i , on notera $S(i) = (S(i)_j, S(i)_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ la représentation donnée par :

$$\forall j \in Q_0, S(i)_j = \begin{cases} k & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } \forall \alpha \in Q_1, S(i)_\alpha = 0$$

Ces représentations sont clairement irréductibles.

Lemme 1.1.5 Soit Q un carquois et X une représentation de Q . Si i est un sommet de Q tel que $X_i \neq 0$ et pour toute arête α de source i , $X_\alpha = 0$, alors X admet $S(i)$ comme sous-représentation.

Grâce à ce lemme, on peut donner une description des représentations irréductibles des carquois sans cycles orientés, c'est-à-dire sans chemin non-trivial dont le sommet de départ et le sommet d'arrivée sont les mêmes.

Théorème 1.1.6 Soit Q un carquois sans cycle orienté. Les seules représentations irréductibles de Q sont les $S(i), i \in Q_0$.

Preuve. Soit $X = (X_i, X_\alpha)$ une représentation irréductible de Q et $i_0 \in Q_0$ tel que $X_{i_0} \neq 0$. Puisque Q est sans cycle orienté, tous ses chemins sont de longueur au plus $\text{Card}(Q_0)$. On peut donc se donner $\alpha_r \cdots \alpha_1$ un chemin de longueur maximale de Q_0 débutant en i_0 et ne passant que par des sommets j tels que $X_j \neq 0$. Notons $i_1 := t(\alpha_r)$. Pour toute arête β de source i_1 , par maximalité de notre chemin, on a $X_\beta = 0$. Par le lemme 1.1.5, X admet $S(i_1)$ comme sous-représentation et donc par irréductibilité, $X = S(i_1)$. ✂

Ce résultat n'est cependant plus vrai lorsque le carquois comporte un cycle orienté.

Exemple 1.1.7 Cherchons les représentations irréductibles de dimension finie du carquois de Jordan.

Une représentation de dimension finie du carquois de Jordan est la donnée d'un espace vectoriel E (de dimension n) et d'un endomorphisme u de E . Ainsi, cette représentation est irréductible si et seulement si E est non nul et s'il n'admet pas de sous-espace stable par u autre que lui-même et l'espace nul.

Soit π_u le polynôme minimal de u et $\pi_u = \prod_{i=1}^r P_i^{\alpha_i}$ sa décomposition en polynômes irréductibles. Par le lemme des noyaux, on déduit que $r = 1$ par irréductibilité.

En outre, si $x \in E$ est tel que $y := P_1^{\alpha_1 - 1}(u)(x) \neq 0$, on a $P_1(u)(y) = \pi_u(x) = 0$. Donc si d désigne le degré de P_1 , la famille $(x, u(x), \dots, u^d(x))$ est liée et donc $F := \text{Vect}(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x))$ est un sous-espace vectoriel stable par u . Dès lors, $F = E$ et donc $d \geq n$. Or, $\alpha_1 \cdot d \leq n$, donc $\alpha_1 = 1$ et π_u est un polynôme irréductible de degré n . Dès lors, u est un endomorphisme cyclique (son polynôme minimal est égal à son polynôme caractéristique).

Réciproquement, si u est cyclique de polynôme minimal irréductible, alors si $x \neq 0 \in E$, le plus petit sous-espace vectoriel stable par u contenant x est $F := \text{Vect}(\{u^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\})$. Il est de dimension $\deg(\pi_{u,x})$, où $\pi_{u,x}$ est le polynôme générateur unitaire de l'idéal des polynômes P tels que $P(u)(x) = 0$. Or, puisque π_u appartient à cet idéal, il est divisible par $\pi_{u,x}$ et donc par irréductibilité, $\pi_u = \pi_{u,x}$. Puisque u est cyclique, on en déduit que F est de dimension n et est donc égal à E . La représentation (E, u) est donc irréductible.

Les représentations irréductibles de dimension finie du carquois de Jordan sont donc données exactement par les polynômes irréductibles sur le corps de base. En particulier, le nombre de représentations irréductibles est infini, puisqu'il y a une infinité de polynômes irréductibles dans un corps. En général, si Q comporte un cycle orienté $\alpha_r \cdots \alpha_1$, donnons nous une représentation irréductible de dimension finie (E, u) du carquois de Jordan. Fixons la représentation X telle que :

$$\forall i \in Q_0, \begin{cases} X_i = E & \text{si le cycle passe par } i \\ X_i = 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } \forall \beta \in Q_1, \begin{cases} X_\beta = u & \text{si } \beta = \alpha_1 \\ X_\beta = \text{Id}_E & \text{si } \exists j \neq 1, \alpha_j = \beta \\ X_\beta = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est alors clair que cette représentation de Q est irréductible, par irréductibilité de (E, u) . On peut donc affirmer que dès qu'un cycle apparaît, le nombre de représentations irréductibles est infini.

1.2 La catégorie des représentations $\text{Rep}_k(Q)$

Définition 1.2.1 (Morphisme de représentations) Soit Q un carquois et X, Y deux représentations. Un morphisme de représentations $\varphi : X \rightarrow Y$ est une famille $(\varphi_i)_{i \in Q_0}$ d'applications linéaires $\varphi_i : X_i \rightarrow Y_i$ telles que pour toute arête $\alpha : i \rightarrow j \in Q_1$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{X_\alpha} & X_j \\ \varphi_i \downarrow & & \downarrow \varphi_j \\ Y_i & \xrightarrow{Y_\alpha} & Y_j \end{array}$$

i.e. $\forall \alpha \in Q_1, \varphi_{t(\alpha)} \circ X_\alpha = Y_\alpha \circ \varphi_{s(\alpha)}$.

Remarque.

- Si tous les φ_i sont des isomorphismes, on dit que φ est un isomorphisme de représentations.
- On notera $\text{Hom}(X, Y)$ l'ensemble des morphismes de représentations de X dans Y , qui est un k -espace vectoriel.
- On peut définir l'image (resp. le noyau, le conoyau) d'un morphisme φ comme la famille des images (resp. des noyaux, des conoyaux) des φ_i .

Exemple 1.2.2 On va essayer de déterminer les classes d'isomorphismes des représentations de dimension finie de certains carquois, sans plus d'outils.

- Considérons Q le carquois le plus simple possible, à un seul sommet et sans arêtes. Une représentation de ce carquois est simplement la donnée d'un espace vectoriel. Deux représentations X et Y sont donc isomorphes si et seulement si X et Y le sont en tant qu'espace vectoriel, *i.e.* :

$$\dim(X) = \dim(Y)$$

- Soit maintenant Q le carquois : $1 \xrightarrow{\alpha} 2$.

Considérons deux représentations de Q : $V_1 \xrightarrow{v} V_2$ et $W_1 \xrightarrow{w} W_2$.

Ces deux représentations sont isomorphes si et seulement si il existe deux isomorphismes linéaires $f : V_1 \rightarrow W_1$ et $g : V_2 \rightarrow W_2$ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{v} & V_2 \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ W_1 & \xrightarrow{w} & W_2 \end{array}$$

C'est-à-dire telles que : $w = g \circ v \circ f^{-1}$. C'est le cas si et seulement si w et v sont des applications équivalentes, et donc si et seulement si :

$$\dim(V_1) = \dim(W_1) \text{ et } \dim(V_2) = \dim(W_2) \text{ et } \text{rg}(v) = \text{rg}(w)$$

- Essayer de déterminer les classes d'isomorphisme "à la main" trouve cependant vite ses limites, comme nous allons le voir avec le carquois suivant : $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$.

Soit deux représentations : $V_1 \xrightarrow{v_1} V_2 \xrightarrow{v_2} V_3$ et $W_1 \xrightarrow{w_1} W_2 \xrightarrow{w_2} W_3$. Ces représentations sont isomorphes si et seulement si il existe des bijections linéaires $f : V_1 \rightarrow W_1, g : V_2 \rightarrow W_2$ et $h : V_3 \rightarrow W_3$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} V_1 & \xrightarrow{v_1} & V_2 & \xrightarrow{v_2} & V_3 \\ f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow h \\ W_1 & \xrightarrow{w_1} & W_2 & \xrightarrow{w_2} & W_3 \end{array}$$

Si l'on suppose disposer de telles applications, alors v_1 (resp. v_2) et w_1 (resp. w_2) sont équivalentes. En outre, les applications $v_2 \circ v_1$ et $w_2 \circ w_1$ sont également équivalentes. On peut alors montrer qu'il s'agit d'une condition nécessaire et suffisante et que donc les deux représentations sont équivalentes si et seulement si :

$$\forall 1 \leq i \leq 3, \dim(V_i) = \dim(W_i) \text{ et } \text{rg}(v_1) = \text{rg}(w_1) \text{ et } \text{rg}(v_2) = \text{rg}(w_2) \text{ et } \text{rg}(v_2 \circ v_1) = \text{rg}(w_2 \circ w_1)$$

On peut démontrer sans trop de difficulté que cette condition est bien nécessaire et suffisante, mais cela se révèle être fastidieux et difficile à utiliser. Le carquois étudié a de plus une structure assez simple, comparée à tous les calculs nécessaires par cette approche. En général, on démontrera qu'il faut exactement $\frac{n(n+1)}{2}$ conditions pour déterminer une classe d'isomorphisme d'un carquois dont le graphe sous-jacent (c'est-à-dire le graphe obtenu en oubliant les orientations des arêtes) est le graphe à n sommets :



- Étudions finalement le carquois de Jordan. Soient (V, v) et (W, w) deux représentations. Elles sont équivalentes si et seulement si il existe un isomorphisme linéaire $f : V \rightarrow W$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{v} & V \\
 f \downarrow & & \downarrow f \\
 W & \xrightarrow{w} & W
 \end{array}$$

i.e. $w = f \circ v \circ f^{-1}$.

Ainsi, les deux représentations sont isomorphe si et seulement si v et w ont les mêmes invariants de similtude. Si le corps est algébriquement clos, les classes d'isomorphismes sont caractérisées par les blocs de Jordan, c'est-à-dire le nombre de blocs, leurs tailles et leurs valeurs propres. Contrairement aux carquois précédent, les classes d'isomorphismes sont au moins indexées par k , et non plus de façon dénombrable, indépendamment du corps de base.

Définition 1.2.3 (Catégorie des représentations) Soit Q un carquois. On définit la catégorie des représentations de Q , que l'on notera $\text{Rep}_k(Q)$:

- i. Ses objets sont les représentations de Q .
- ii. Ses morphismes sont les morphismes de représentations, munis de la composition composante par composante.
- iii. Pour un objet X , l'identité est : $\text{id}_X = (\text{Id}_{X_i})_{i \in Q_0}$.

Remarque. On peut définir de même $\text{rep}_k(Q)$ la catégorie des représentations de dimension finie de Q .

1.3 L'algèbre des chemins

Définition 1.3.1 (Algèbre des chemins) Soit Q un carquois. On définit l'algèbre des chemins kQ comme la k -algèbre engendrée par les chemins sur le carquois Q (y compris les chemins triviaux, que l'on notera ε_i pour tout sommet i), avec la concaténation comme loi de composition interne.

Plus précisément, si c et c' sont deux chemins, $c \cdot c' = \begin{cases} cc' & \text{si } s(c) = t(c') \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Remarque.

- Pour tout sommet i , et tout chemin c , $c \cdot \varepsilon_i = \delta_{i,s(c)} \cdot c$ et $\varepsilon_i \cdot c = \delta_{i,t(c)} c$. En particulier, ε_i est un élément idempotent (c'est-à-dire que $\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i$).
- L'élément neutre pour la loi interne est : $\sum_{i \in Q_0} \varepsilon_i$.
- L'algèbre des chemins est de dimension finie (en tant que k -espace vectoriel) si et seulement si Q est sans cycle orienté.

Exemple 1.3.2

- L'algèbre des chemins associée au carquois de Jordan est isomorphe à $k[X]$.
- L'algèbre des chemins du carquois $Q : 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$ est isomorphe à l'algèbre des matrices carrées triangulaires inférieures de dimension 3.
- Plus précisément, l'algèbre kQ est engendrée par $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \alpha, \beta)$. On identifie alors les ε_i aux matrices E_{ii} , α à la matrice E_{21} et β à E_{32} .
- Le carquois $\beta \curvearrowright 1 \curvearrowright \alpha$ a pour algèbre des chemins l'algèbre des chemins $k\langle X, Y \rangle$ des polynômes en deux indéterminées qui ne commutent pas.

Définition 1.3.3 (Représentations projectives, injectives) Soit Q un carquois et i un sommet de Q .

- i. La représentation projective $P(i)$ est la représentation telle que pour tout sommet j , $P(i)_j = \varepsilon_j \cdot kQ \cdot \varepsilon_i$ (soit la sous-algèbre de kQ engendrée par les chemins reliant i à j) et pour toute arête α , $P(i)_\alpha = \alpha \cdot$ (soit la concaténation à gauche par α).
- ii. La représentation injective $I(i)$ est la représentation telle que pour tout sommet j , $I(i)_j$ est le dual (en tant que k -espace vectoriel) de $\varepsilon_i \cdot kQ \cdot \varepsilon_j$ et pour toute arête α , $I(i)_\alpha$ est l'application transposée de $\cdot \alpha$ (la concaténation à droite par α).

On remarque que ces représentations ne sont de dimension finie que si le carquois est sans cycle orienté.

Exemple 1.3.4 Considérons le carquois : $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$.

Ses représentations projectives et injectives sont :

$$\begin{aligned} - P(1) = I(3) : k &\xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k \text{ et } I(1) = S(1) : k \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \\ - P(2) : 0 &\xrightarrow{0} k \xrightarrow{1} k \text{ et } I(2) : k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} 0 \\ - P(3) = S(3) : 0 &\xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} k \end{aligned}$$

Théorème 1.3.5 Soit Q un carquois.

- Si X est une représentation de Q , alors $\text{Hom}(P(i), X) \cong X_i$.
- Les représentations $P(i), i \in Q_0$, sont deux à deux non isomorphes.

Preuve.

- Soit $i \in Q_0$ fixé. Construisons un isomorphisme $\psi : \text{Hom}(P(i), X) \rightarrow X_i$ (au sens des k -espaces vectoriels), ainsi que son inverse ρ .

Pour tout morphisme $f \in \text{Hom}(P(i), X)$, on pose $\psi(f) = f_i(\varepsilon_i)$, ce qui définit bien une application linéaire.

Si maintenant x est un élément de X_i , son image $\rho(x)$ est l'application φ défini par :

$$\varphi_j(c) = X_{c_r} \circ \dots \circ X_{c_1}(x)$$

pour tout sommet j et pour tout chemin $c = c_r \cdots c_1$ de i à j . Vérifions que φ est bien un morphisme de représentations. Si α est une arête de Q , on doit vérifier : $X_\alpha \circ \varphi_{s(\alpha)} = \varphi_{t(\alpha)} \circ P(i)_\alpha$.

Or, si $c = c_r \cdots c_1$ est un chemin de i à $s(\alpha)$:

$$X_\alpha \circ \varphi_{s(\alpha)}(c) = X_\alpha \circ X_{c_r} \circ \dots \circ X_{c_1}(x) = \varphi_{t(\alpha)}(\alpha \cdot c) = \varphi_{t(\alpha)} \circ P(i)_\alpha(c)$$

Soit φ un élément de $\text{Hom}(P(i), X)$. Puisque φ est un morphisme de représentations, on a, pour tout sommet j et tout chemin $c = c_r \cdots c_1$ de i à j :

$$\rho \circ \psi(\varphi)_j(c) = \rho(\varphi(\varepsilon_i))_j(c) = X_{c_r} \circ \dots \circ X_{c_1}(\varphi_i(\varepsilon_i)) = \varphi_j \circ P(i)_{c_r} \circ \dots \circ P(i)_{c_1}(\varepsilon_i) = \varphi_j(c)$$

Si maintenant $x \in X_i$, on a : $\psi \circ \rho(x) = \rho(x)_i(\varepsilon_i) = x$.

L'application ψ est bien un isomorphisme d'inverse ρ .

- Soient i, j deux sommets tels que $P(i) \cong P(j)$. Alors d'après le point précédent :

$$k = S(i)_i \cong \text{Hom}(P(i), S(i)) \cong \text{Hom}(P(j), S(i)) \cong S(i)_j$$

Par définition de la représentation $S(i)$, on a donc nécessairement $i = j$.

✂

Remarque. De manière duale, on peut démontrer un théorème similaire pour les représentations injectives, en particulier le point ii.

Les représentations d'un carquois peuvent en fait être vues comme des modules (à gauche) sur l'algèbre des chemins, et réciproquement, ce qui va simplifier un certain nombre de notions liées aux carquois.

Théorème 1.3.6 Soit Q un carquois. La catégorie des représentations $\text{Rep}_k(Q)$ est équivalente à la catégorie ${}_kQ\text{Mod}$ des kQ -modules à gauche.

Preuve. On va construire deux foncteurs $F : {}_kQ \text{ Mod} \rightarrow \text{Rep}_k(Q)$ et $G : \text{Rep}_k(Q) \rightarrow {}_kQ \text{ Mod}$ tels que $F \circ G \cong 1_{\text{Rep}_k(Q)}$ et $G \circ F \cong 1_{{}_kQ \text{ Mod}}$. L'idée est qu'en suivant un chemin sur une représentation de Q , on obtient une composée d'applications linéaires, qui nous donne un loi externe, et réciproquement, la multiplication par un chemin dans un module nous donne une suite d'applications linéaires.

Construisons tout d'abord F . Soit M un kQ -module (à gauche). On pose $F(M)$ la représentation $(M_i, \varphi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$, où pour tout sommet i , $M_i := \varepsilon_i \cdot M$ et pour toute arête $\alpha : i \rightarrow j$, l'application $\varphi_\alpha : M_i \rightarrow M_j$ est définie par :

$$\forall m \in M, \varphi_\alpha(\varepsilon_i \cdot m) = \alpha \cdot m$$

Soit maintenant $f : M \rightarrow M'$ un morphisme de ${}_kQ \text{ Mod}$. Pour tout sommet i , on note $F(f)_i : M_i \rightarrow M'_i$ l'application linéaire définie par :

$$\forall m \in M, F(f)_i(\varepsilon_i \cdot m) = \varepsilon_i \cdot f(m)$$

Construisons maintenant G . Soit $X = (X_i, X_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ une représentation de Q . On pose alors $G(X) := \prod_{i \in Q_0} X_i$, sur lequel on définit alors, pour tout chemin $c = \alpha_r \cdots \alpha_1$:

$$\forall (x_i)_{i \in Q_0} \in G(X), c \cdot (x_i)_{i \in Q_0} = (\delta_{i, t(c)} X_{\alpha_r} \circ \dots \circ X_{\alpha_1}(x_{s(c)}))_{i \in Q_0}$$

Ainsi, l'action de c a pour image $X_{t(c)}$ et pour support $X_{s(c)}$. On définit alors l'action de kQ sur $G(X)$ par k -linéarité. Pour un morphisme de représentations $f : X \rightarrow Y$, on définit $G(f) : G(X) \rightarrow G(Y)$ par :

$$\forall (x_i)_{i \in Q_0} \in G(X), G(f)((x_i)_{i \in Q_0}) = (f_i(x_i))_{i \in Q_0}$$

On ne vérifiera pas la bonne définition des foncteurs F et G , ainsi que l'équivalence, qui ne présente pas de grande difficulté, mais nécessite quelques calculs.



De nombreuses notions liées aux modules peuvent alors être définies pour les représentations par cette équivalence. On peut notamment citer les notions d'image, de noyau et de conoyau d'un morphisme de représentations, qui sont bien des représentations, puisque le noyau et le conoyau d'une application kQ -linéaire sont des kQ -modules.

Les représentations projectives le sont au sens où le module associé à une représentation $P(i)$ est projectif, c'est-à-dire qu'il est le facteur direct d'un module libre (de la forme kQ^I).

En effet, on a : $\bigoplus_{i \in Q} P(i) = \bigoplus_{i, j \in Q} P(i)_j = \bigoplus_{i, j \in Q} \varepsilon_j \cdot kQ \cdot \varepsilon_i \bigoplus_{i \in Q} kQ \cdot \varepsilon_i = kQ$.

1.4 Sommes directes de représentations

Définition 1.4.1 (Somme directe, représentation indécomposable) Soit Q un carquois et X_1, \dots, X_r des représentations de Q . Si pour tout $1 \leq i \leq r$ on note M_i le kQ -modules correspondant à la représentation X_i , alors la représentation X correspondant au module $M := M_1 \oplus \dots \oplus M_r$ est appelée la somme directe des X_1, \dots, X_r et sera notée $X_1 \oplus \dots \oplus X_r$.

Une représentation X est alors dite indécomposable si $X \neq 0$ et si pour toutes représentations X_1 et X_2 telles que $X = X_1 \oplus X_2$, une des représentations X_1 ou X_2 est nulle.

Remarque.

- i. Si Y est une représentation, alors $\text{Hom}(X_1 \oplus \dots \oplus X_r, Y) = \text{Hom}(X_1, Y) \oplus \dots \oplus \text{Hom}(X_r, Y)$.
- ii. Il est clair qu'une représentation irréductible est indécomposable. Cependant, il existe des représentations indécomposables mais non irréductibles, quel que soit le corps de base (contrairement au cas des représentations linéaires de groupes finis).

En effet, considérons le carquois : $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3$ et une de ses représentations X :

$$k \xrightarrow{1} k \xleftarrow{0} 0$$

Cette représentation n'est pas irréductible, puisque d'après le lemme 1.1.5, $S(2)$ en est une sous-représentation. En outre, si X s'écrit comme une somme directe $X = Y \oplus Z$, on a : $k = Y_1 \oplus Z_1$ et $0 = Y_2 \oplus Z_2$. Donc un des espaces vectoriels Y_1 ou Z_1 est nul.

Si, disons, Y_1 est nul, alors $k = Z_1$ et donc puisque les applications Z_α et X_α coïncident sur $Z_1 = k$, on déduit que l'on a : $Z_2 = k$. Ainsi, $Y = 0$. On raisonne de même si $Z_1 = 0$.

Exemple 1.4.2

— Cherchons les représentations indécomposables de dimension finie du carquois de Jordan. Une représentation indécomposable de dimension finie du carquois de Jordan est un couple (E, u) tel que pour tous sous-espaces vectoriels F et G de E stable par u , $E = F \oplus G \implies F = 0$ ou $G = 0$.

Dès lors, si l'on se donne la décomposition de Frobenius de u , il apparaît que u est cyclique. En outre, pour les mêmes raisons que lors de l'étude des représentations irréductibles du carquois de Jordan, il apparaît que le polynôme minimal de u est de la forme P^α , où P est un polynôme irréductible de $k[X]$.

Réciproquement, si E est un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme cyclique de polynôme minimal P^α , où P est un polynôme irréductible de $k[X]$, par unicité de la réduction de Frobenius, (E, u) est bien indécomposable.

— Si Q est un carquois sans cycles orientés, les représentations $P(i)$ et $I(i)$ sont indécomposables.

Soit i un sommet de Q . Supposons par l'abusurde qu'il existe deux représentations M, N non nulles telles que $P(i) = M \oplus N$. Puisque Q est sans cycle, $P(i)_i = k$ et donc, quitte à échanger M et N , l'espace N_i est nul et $M_i = k$.

Soit $j \neq i$ un sommet tel que $N_j \neq 0$. Soit $c = \alpha_r \cdots \alpha_1$ un chemin de i à j (qui existe car $P(i)_j \supset N_j \neq 0$), on a : $P(i)_{\alpha_r} \circ \dots \circ P(i)_{\alpha_1}(\varepsilon_i) = c$. Or, $\varepsilon_i \in M_i$, donc $c \in M_j$. Dès lors, puisque les chemins de i à j engendrent $P(i)_j$, on a : $P(i)_j \subset M_j$ et donc $M_j = P(i)_j$, ce qui contredit l'hypothèse $N_j \neq 0$.

On montre de manière similaire que $I(i)$ est irréductible.

Théorème 1.4.3 (Lemme de Fitting) Soit Q un carquois et X une représentation de dimension finie de Q . Alors si φ est un endomorphisme de X :

- i. Pour tout entier r suffisamment grand, $X = \text{Im } \varphi^r \oplus \text{Ker } \varphi^r$.
- ii. Si X est indécomposable, alors φ est soit un automorphisme, soit est nilpotent.

Preuve.

i. Puisque la représentation X est de dimension finie, la suite de représentations $(\text{Im } \varphi^r)_{r \in \mathbb{N}}$ étant décroissante, elle est stationnaire (c'est le même principe que dans un espace vectoriel de dimension finie). Dès lors, il existe un entier r tel que pour tout $s \geq r$, $\text{Im } \varphi^s = \text{Im } \varphi^r$.

Le morphisme φ^r est un isomorphisme entre $\text{Im } \varphi^r$ et $\text{Im } \varphi^{2r} = \text{Im } \varphi^r$ (c'est un endomorphisme surjectif) et on notera ψ son inverse. Notons alors $p := \psi \circ \varphi^r : X \rightarrow \text{Im } \varphi^r$, qui est un projecteur ($p^2 = p$).

Ainsi, $X = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$. Or, $\text{Im } p = \text{Im } \varphi^r$ et $\text{Ker } p = \text{Ker } \varphi^r$, donc on a bien : $X = \text{Im } \varphi^r \oplus \text{Ker } \varphi^r$.

ii. Si X est indécomposable, alors d'après le point i., l'une des représentations $\text{Ker } \varphi^r$ ou $\text{Im } \varphi^r$ est nulle, ce qui revient bien à dire que φ est un automorphisme (si $\text{Ker } \varphi^r = 0$) ou est nilpotent (si $\text{Im } \varphi^r = 0$).



Corollaire 1.4.4 Une représentation X est indécomposable si et seulement si l'anneau $\text{End}(X)$ est local.

Preuve. Une des caractérisation de la localité d'un anneau est que la somme de deux éléments non-inversibles est non-inversible.

On suppose X indécomposable et on se donne $\varphi, \psi \in \text{End}(X)$ tels que $\varphi + \psi$ est inversible, d'inverse que l'on notera ρ . Si φ est non-inversible, alors $\rho \circ \varphi$ ne l'est pas non plus. Dès lors, par le lemme de Fitting, l'endomorphisme $\rho \circ \varphi$ est nilpotent.

Ainsi, $\rho \circ \psi = \text{id}_X - \rho \circ \varphi$ est inversible, d'inverse $\sum_{r=0}^{+\infty} (\rho \circ \varphi)^r$ (qui est une somme finie, puisque $\rho \circ \varphi$ est nilpotent).

Par conséquent, ψ est inversible. L'anneau $\text{End}(X)$ est bien local par contraposée.

Réciproquement, on suppose qu'il existe des représentations non nulles Y et Z telles que $X = Y \oplus Z$. Alors on peut se donner la projection π_1 (resp. π_2) de X sur Y (resp. Z) parallèlement à Z (resp. Y), de telle sorte que : $\text{id}_X = \pi_1 + \pi_2$. Ces projections ne sont pas inversibles, car elles sont de noyaux non nuls.



Remarque.

- Nous avons démontré le lemme de Fitting du point de vue des représentations de carquois, mais celui-ci se généralise lorsque l'on se place dans le cadre des modules : pour un anneau A , il suffit que toute suite décroissante de A -modules soit stationnaire pour que le lemme de Fiting soit vérifié sur les A -modules.
- Ici, c'est la dimension finie des représentations qui remplace cette propriété. Si l'on considère la représentation X (de dimension infinie) sur le carquois de Kronecker :

$$k[T] \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot T} \\ \xrightarrow{\text{id}} \end{array} k[T]$$

Un endomorphisme φ de X est un couple (φ_1, φ_2) d'endomorphismes de $k[T]$ faisant commuter les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} k[T] & \xrightarrow{\cdot T} & k[T] \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi_2 \\ k[T] & \xrightarrow{\cdot T} & k[T] \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} k[T] & \xrightarrow{\text{id}} & k[T] \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi_2 \\ k[T] & \xrightarrow{\text{id}} & k[T] \end{array}$$

Ainsi, pour tout polynôme $P \in k[T]$, $T\varphi_1(P) = \varphi_2(TP)$ et $\varphi_1(P) = \varphi_2(P)$.
 Donc $\varphi_1 = \varphi_2$ et φ_1 commute avec $\cdot X$. Dès lors : $\forall k \in \mathbb{N}, \varphi_1(X^k) = X^k \varphi_1(1)$.
 Réciproquement, si $Q \in k[T]$, si $\varphi = (\cdot Q, \cdot Q)$ alors φ est bien un endomorphisme de X .
 Ainsi, $\text{End}(X) \cong k[T]$, qui n'est pas local : $(T + 1) + (-T) = 1$.

En outre, X est indécomposable, puisque si X s'écrit comme la somme directe de deux représentations Y et Z , la projection π de X sur Y parallèlement à Z est un endomorphisme de X . Dès lors, si $\pi = (\cdot Q, \cdot Q)$ pour un certain polynôme Q , on a : $Q^2 = Q$ et ainsi, $Q \in \{0, \pm 1\}$. Donc $Y = 0$ ou $Y = X$.

Définition 1.4.5 (Radical) Soient X, Y deux représentations. On définit leur radical $\text{Rad}(X, Y)$ comme l'ensemble des morphismes $\varphi \in \text{Hom}(X, Y)$ tels que pour toute représentation Z indécomposable et pour tous morphismes $\forall \sigma \in \text{Hom}(Z, X), \forall \tau \in \text{Hom}(Y, Z)$, l'endomorphisme $\tau \circ \varphi \circ \sigma : Z \rightarrow Z$ est non-inversible.

Lemme 1.4.6 Soient X et Y des représentations.

- i. $\text{Rad}(X, Y)$ est un sous-espace vectoriel de $\text{Hom}(X, Y)$.
- ii. Si $Y = Y_1 \oplus Y_2$, $\text{Rad}(X, Y) = \text{Rad}(X, Y_1) \oplus \text{Rad}(X, Y_2)$.
- iii. Si $X = X_1 \oplus X_2$, $\text{Rad}(X, Y) = \text{Rad}(X_1, Y) \oplus \text{Rad}(X_2, Y)$.
- iv. Si X et Y sont indécomposables, alors $\text{Hom}(X, Y) \setminus \text{Rad}(X, Y)$ est égal l'ensemble des isomorphismes de X dans Y (potentiellement vide).

Preuve.

- i. On va seulement montrer que $\text{Rad}(X, Y)$ est stable par addition. Soient donc $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{Rad}(X, Y)$.
 Z est une représentation indécomposable et $\sigma \in \text{Hom}(Z, X), \tau \in \text{Hom}(Y, Z)$, alors puisque $\text{End}(Z)$ est local par le corollaire 1.4.4, $\tau \circ (\varphi_1 + \varphi_2) \circ \sigma = \tau \circ \varphi_1 \circ \sigma + \tau \circ \varphi_2 \circ \sigma$ est non-inversible.
- ii. On a : $\text{Hom}(X, Y) = \text{Hom}(X, Y_1) \oplus \text{Hom}(X, Y_2)$, donc si $\varphi \in \text{Hom}(X, Y)$, il existe $\varphi_i \in \text{Hom}(X, Y_i), i = 1, 2$ tel que $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.
 De même, si Z est une représentation indécomposable, si $\sigma \in \text{Hom}(Z, X), \tau \in \text{Hom}(Y, Z)$, on dispose de $\tau_i \in \text{Hom}(Y_i, Z), i = 1, 2$ tel que $\tau = \tau_1 + \tau_2$, de sorte que $\varphi = \tau_1 \circ \varphi_1 \circ \sigma + \tau_2 \circ \varphi_2 \circ \sigma$. Dès lors, si $\varphi \in \text{Rad}(X, Y)$, si on fixe $\tau_1 = 0$, on voit que $\varphi_2 \in \text{Rad}(X, Y_2)$ et de même pour φ_1 .
 Réciproquement, si $\varphi_i \in \text{Rad}(X, Y_i), i = 1, 2$, alors les $\tau_i \circ \varphi_i \circ \sigma$ sont non-inversibles et donc $\tau \circ \varphi \circ \sigma$ également, par localité de $\text{End}(Z)$.
 La somme est directe d'après le point i.
- iii. Idem que le point précédent.
- iv. Si $\varphi \in \text{Hom}(X, Y) \setminus \text{Rad}(X, Y)$, on dispose d'une représentation indécomposable Z et de deux morphismes de représentations $\sigma \in \text{Hom}(Z, X), \tau \in \text{Hom}(Y, Z)$ tels que $\tau \circ \varphi \circ \sigma$ est inversible. Dès lors, σ est inversible à gauche : $(\tau \circ \varphi \circ \sigma)^{-1} \circ \tau \circ \varphi \circ \sigma = \text{id}_Z$.
 Or, Z est de dimension finie, donc chaque composante de σ est inversible (car inversible à gauche) et ainsi, σ est un isomorphisme. Il en va de même pour τ , et donc pour φ . La réciproque est claire.



Théorème 1.4.7 (Théorème de Krull-Remak-Schmidt) Soit X une représentation de dimension finie. Il existe des représentations indécomposables X_1, \dots, X_r deux à deux non-isomorphes et des entiers $a_1, \dots, a_r \geq 1$ tels que :

$$X = X_1^{a_1} \oplus \dots \oplus X_r^{a_r}$$

En outre, si $X = Y_1^{b_1} \oplus \dots \oplus Y_s^{b_s}$ est une décomposition similaire, alors $r = s$ et, quitte à réordonner, $Y_i \cong X_i$ et $a_i = b_i$ pour tout $1 \leq i \leq r$.

Preuve. On montre aisément l'existence d'une telle décomposition, par récurrence sur la dimension. Montrons donc l'unicité.

Si Y est une représentation indécomposable, on note :

$$v_Y(X) := \frac{\dim \text{Hom}(X, Y) - \dim \text{Rad}(X, Y)}{\dim \text{Hom}(Y, Y) - \dim \text{Rad}(Y, Y)}$$

On remarque, par le point iii. du lemme 1.4.6, que : $v_Y(X) = \sum_{i=1}^r a_i \cdot v_Y(X_i)$.

En outre, si $1 \leq i \leq r$, par le point iv. du lemme 1.4.6, $v_Y(X_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } X_i \not\cong Y \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ et donc $v_Y(X) = a_i$ si $Y \cong X_i$.

On retrouve donc bien l'unicité, les quantités v_Y faisant ici office d'analogie aux valuations p -adique dans la preuve de l'unicité de la décomposition des entiers en produit de nombres premiers.



Remarque. Le théorème de Krull-Remak-Schmidt reposant essentiellement sur le lemme de Fitting, il est vérifié dans un cadre plus large que les représentations de carquois. Il nous permet de restreindre notre étude aux seuls indécomposables.

2 Foncteurs de réflexion et de Coxeter

Dans toute la suite, on supposera les représentations de dimension finie.

2.1 Forme d'Euler et réflexions

Définition 2.1.1 (Ordre admissible) Soit Q un carquois. Un sommet i est appelé puits (resp. source) si pour toute arête α , $s(\alpha) \neq i$ (resp. $t(\alpha) \neq i$).

Si i est un sommet de Q , on notera $\sigma_i Q$ le carquois obtenu à partir de Q en renversant toutes les arêtes débutant ou se terminant en i . On appelle alors ordre admissible des arêtes de Q toute énumération i_1, \dots, i_n des arêtes de Q telle que pour tout $1 \leq p \leq n$, le sommet i_p est un puits du carquois $\sigma_{p-1} \dots \sigma_1 Q$ (en convenant que si $p = 1$, ceci désigne le carquois Q).

Lemme 2.1.2 Un carquois Q admet un ordre admissible si et seulement s'il ne possède pas de cycle orienté.

Preuve. Montrons par récurrence sur le nombre de sommets de Q que si Q est sans cycle orienté, alors il admet un ordre admissible.

Si Q n'a qu'un seul sommet, le résultat est évident.

Soit $n \geq 1$, supposons le résultat vrai si Q est un carquois à n sommets sans cycle orienté. Si Q est un carquois à $n + 1$ sommets sans cycle orienté, on peut se donner i_{n+1} une source de Q et considérer Q' le carquois obtenu à partir de Q en retirant le sommet i_{n+1} et les arêtes qui débutent ou terminent en ce sommet. Alors Q' admet un ordre admissible i_1, \dots, i_n et il apparaît que i_1, \dots, i_{n+1} est un ordre admissible des arêtes de Q .

Soit maintenant Q un carquois possédant un cycle orienté $\alpha_l \cdots \alpha_1$. Supposons par l'absurde qu'il admette un ordre admissible i_1, \dots, i_n .

Notons $j_1 = s(\alpha_1), \dots, j_l = s(\alpha_l)$ les sommets apparaissant dans le cycle $\alpha_l \cdots \alpha_1$, de telle sorte que $s(\alpha_i) = j_i$. Soit alors q l'entier tel que j_q apparaisse en premier dans l'ordre i_1, \dots, i_n parmi les sommets du cycle. Si $i_p = j_q$, le sommet j_q est un puits du carquois $\sigma_{p-1} \dots \sigma_1 Q$ et donc l'arête $\alpha_q : j_q \rightarrow j_{q+1}$ a été retournée.

C'est donc que le sommet j_{q+1} apparaît parmi i_1, \dots, i_{p-1} , contradiction. ✂

Définition 2.1.3 (Forme d'Euler, réflexions) Soit Q un carquois, à n sommets.

i. La forme d'Euler associée à Q est la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^n, \langle x, y \rangle = \sum_{i \in Q_0} x_i y_i - \sum_{\alpha \in Q_1} x_{s(\alpha)} y_{t(\alpha)}$$

ii. Cette forme bilinéaire n'est pas symétrique, on pose donc pour tous $x, y \in \mathbb{Z}^n, (x, y) = \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle$.

iii. Si Q ne possède pas de boucle, la réflexion σ_i par rapport au sommet i comme l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{Z}^n, \sigma_i(x) = x - \frac{2(x, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$$

où e_i est le i -ème vecteur de la base canonique de \mathbb{Z}^n .

Remarque.

— Les σ_i sont des automorphismes de \mathbb{Z}^n et sont bien des réflexions, puisque (\cdot, \cdot) est une forme bilinéaire symétrique.

— Si $i \neq j$ sont des sommets de $Q, (e_i, e_j) = -\text{Card}\{\alpha \in Q_1 \mid s(\alpha) = i \text{ et } t(\alpha) = j \text{ ou } s(\alpha) = j \text{ et } t(\alpha) = i\}$, c'est-à-dire l'opposé du nombre d'arêtes de i à j et de j à i .

En particulier, si i et j ne sont pas voisins, $(e_i, e_j) = 0$ et donc $\sigma_i(e_j) = e_j - (e_i, e_j)e_i = e_j$

— Si Q est sans boucles, pour tout sommet $i, (e_i, e_i) = 2$.

Définition 2.1.4 (Transformation de Coxeter) Soit Q un carquois sans cycle orienté et i_n, \dots, i_1 un ordre admissible de ses sommets.

On appelle transformation Coxeter l'automorphisme de $\mathbb{Z}^n : c = \sigma_{i_n} \circ \dots \circ \sigma_{i_1}$. On montrera dans la suite que c ne dépend pas de l'ordre admissible choisi.

Dans la suite, on se donne un ordre partiel \leq sur \mathbb{Z}^n : si x, y sont deux vecteurs de \mathbb{Z}^n , alors $x \geq y$ si et seulement si pour tout $i, x_i \geq y_i$. Ainsi, un vecteur non nul sera dit strictement positif si toutes ses coordonnées sont positives.

2.2 Foncteurs de réflexion

Définition 2.2.1 (Foncteur de réflexion) Soit Q un carquois, deux représentations X et X' et un morphisme de représentations $\varphi : X \rightarrow X'$.

i. Si un sommet i est un puits du carquois Q , alors on définit le foncteur $S_i^+ : \text{Rep}_k(Q) \rightarrow \text{Rep}_k(\sigma_i Q)$ comme suit :

— On définit $Y = S_i^+(X)$ comme la représentation de $\sigma_i Q$ telle que pour tout sommet $j \neq i, Y_j = X_j$ et Y_i est la noyau de l'application :

$$\xi = (X_\alpha) : \bigoplus_{\alpha \in Q_1, t(\alpha)=i} X_{s(\alpha)} \rightarrow X_i$$

Si α est une arête telle que $t(\alpha) \neq i$, on pose $Y_\alpha = X_\alpha$ et sinon, on pose $Y_\alpha = \pi_\alpha \circ \tilde{\xi}$, où $\tilde{\xi} : Y_i \rightarrow$

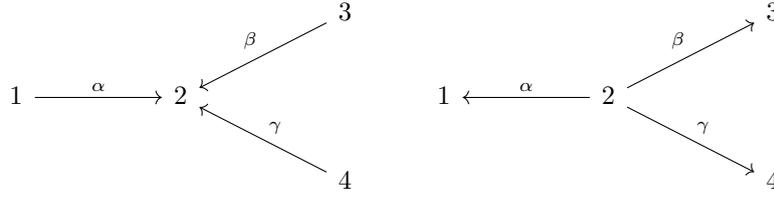
$\bigoplus_{\beta \in Q_1, t(\beta)=i} X_{s(\beta)}$ est l'injection et $\pi_\alpha : \bigoplus_{\beta \in Q_1, t(\beta)=i} X_{s(\beta)} \rightarrow X_{s(\alpha)}$ est la projection.

— On définit $\psi = S_i^+(\varphi)$ comme le morphisme de représentations de $Y = S_i^+(X)$ dans $Y' = S_i^+(X')$ tel que pour tout sommet $j \neq i, \psi_j = \varphi_j$ et $\psi_i : Y_i \rightarrow Y'_i$ est la restriction à Y_i de l'application :

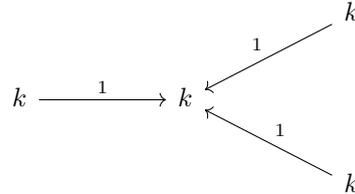
$$(\varphi_{s(\alpha)}) : \bigoplus_{\alpha \in Q_1, t(\alpha)=i} X_{s(\alpha)} \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in Q_1, t(\alpha)=i} X'_{s(\alpha)}$$

ii. Si un sommet i est une source de Q , on définit de manière duale le foncteur $S_i^- : \text{Rep}_k(Q) \rightarrow \text{Rep}_k(\sigma_i Q)$, en remplaçant la notion de noyau par le conoyau.

Exemple 2.2.2 On considère les carquois Q (à gauche) et $\sigma_2 Q$ (à droite) :



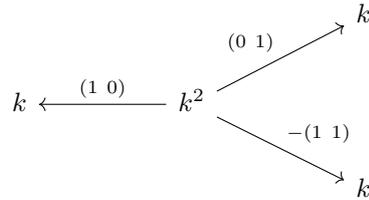
Soit X la représentation $I(1)$ de Q , c'est-à-dire la représentation :



On va calculer $Y = S_2^+(X)$. Par définition, on a : $Y_1 = Y_3 = Y_4 = k$.

L'espace Y_2 est le noyau de l'application : $\begin{cases} k^3 \rightarrow k \\ (x, y, z) \mapsto x + y + z \end{cases}$, c'est-à-dire : $\{(x, y, -x-y) \mid (x, y, z) \in k^3\} \cong k^2$.

En outre, Y_α est l'application $(1 \ 0)$, Y_β est $(0 \ 1)$ et Y_γ est $-(1 \ 1)$, définies de k^2 dans k . de sorte que Y est la représentation :



Remarque.

- Si i est un puits (resp. une source), S_i^+ (resp. S_i^-) est bien un foncteur.
- Si i est un puits (resp. une source) et X une représentation telle que $S_i^+(X) = 0$ (resp. $S_i^-(X) = 0$), alors $X = 0$ ou $X \cong S(i)^m$ pour un entier m .

Lemme 2.2.3 Soient X et X' deux représentations de Q et i un puits de Q .

On dispose d'un morphisme $\iota_i(X) : S_i^- \circ S_i^+(X) \rightarrow X$, en posant, pour $i \neq j$, $(\iota_i(X))_j = \text{id}_{X_j}$ et $(\iota_i(X))_i$ est l'application canonique :

$$(S_i^- \circ S_i^+(X))_i = \text{Coker } \tilde{\xi} \cong \text{Im } \xi \hookrightarrow X_i$$

On a alors :

- i. $S_i^+(X \oplus X') = S_i^+(X) \oplus S_i^+(X')$
- ii. La représentation $S_i^- \circ S_i^+(X)$ est facteur direct de $X : X = S_i^- \circ S_i^+(X) \oplus \text{Coker } \iota_i(X)$.
- iii. Si $\text{Coker } \iota_i(X) = 0$, alors $\dim S_i^+(X) = \sigma_i(\dim X)$.

Preuve. L'application $(\iota_i(X))_i$ est bien définie, puisque l'on a :

$$\text{Coker } \tilde{\xi} = \bigoplus_{\alpha \in Q_1, t(\alpha)=i} X_{s(\alpha)} / Y_i = \bigoplus_{\alpha \in Q_1, t(\alpha)=i} X_{s(\alpha)} / \text{Ker } \xi \cong \text{Im } \xi$$

L'isomorphisme découle du théorème de factorisation. On dispose enfin de l'injection canonique : $\text{Im } \xi \hookrightarrow Y_i$.

- i. Notons π la projection de $X \oplus X'$ sur X parallèlement à X' , et notons Y (resp. Y', Z) l'image de X (resp. $X', X \oplus X'$) par S_i^+ . Puisque S_i^+ est un foncteur : $\text{id}_Z = S_i^+(\text{id}_{X \oplus X'}) = S_i^+(\pi + \text{id}_{X \oplus X'} - \pi) = S_i^+(\pi) + S_i^+(\text{id}_{X \oplus X'} - \pi)$. Ainsi, on a bien : $S_i^+(X \oplus X') = S_i^+(X) \oplus S_i^+(X')$.
- ii. Considérons la projection canonique $\rho'_i : X_i \rightarrow \text{Coker } \xi$ et $\rho_i : \text{Coker } \xi \rightarrow X_i$ de sorte que $\rho'_i \circ \rho_i = \text{id}_{\text{Coker } \xi}$. En fixant $\rho_j = 0$ pour tout sommet $j \neq i$, on obtient un morphisme $\rho : \text{Coker } \iota_i(X) \rightarrow X$. On a alors : $X = \text{Im}(\rho) \oplus \text{Im}(\iota_i(X)) \cong \text{Coker } \iota_i(X) \oplus S_i^- \circ S_i^+(X)$.

iii. Si $\text{Coker } \iota_i(X) = 0$, alors ξ est surjective, donc d'après le théorème du rang appliqué sur chaque composante on a : $\dim Y_i = \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} \dim X_{s(\alpha)} - \dim X_i$, et donc, puisque i est un puits :

$$\begin{aligned} \dim(Y) &= \sum_{j \neq i} (\dim X_j) e_j + (\dim Y_i) e_i \\ &= \sum_{j \neq i} (\dim X_j) e_j + \left(\sum_{\substack{\alpha \in Q_1, \\ t(\alpha)=i}} \dim X_{s(\alpha)} - \dim X_i \right) e_i \\ &= \dim X + \left(\sum_{j \neq i} \sum_{\substack{\alpha \in Q_1, \\ s(\alpha)=j, t(\alpha)=i}} (\dim X_j) e_i \right) - 2(\dim X_i) e_i \\ &= \dim X - \sum_{j \neq i} (\dim X_j e_j, e_i) e_i - 2(\dim X_i) e_i = \sigma_i(\dim X) \end{aligned}$$

✂

Lemme 2.2.4 Soit i un puits et X une représentation indécomposable de Q . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- i. $X \not\cong S(i)$
- ii. $S_i^+(X)$ est indécomposable.
- iii. $S_i^+(X) \neq 0$
- iv. $S_i^- \circ S_i^+(X) \cong X$
- v. L'application $(X_\alpha) : \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1, \\ t(\alpha)=i}} X_{s(\alpha)} \rightarrow X_i$ est surjective.
- vi. $\sigma_i(\dim X) > 0$
- vii. $\dim S_i^+(X) = \sigma_i(\dim X)$

Preuve.

i. \implies ii. On a $S_i^+(X)_j \neq 0$ pour $j \neq i$ et donc d'après le théorème de Krull-Remak-Schmidt, on peut écrire $S_i^+(X) = Y \oplus Z$, avec Z indécomposable et non isomorphe à $S(i)$ (comme X).

D'après le lemme 2.2.3 i. : $S_i^- \circ S_i^+(X) = S_i^-(Y) \oplus S_i^-(Z)$.

Or, d'après le lemme 2.2.3 ii. : $X = S_i^- \circ S_i^+(X) \oplus \text{Coker } \iota_i(X)$, donc $X = S_i^- \circ S_i^+(X)$ ou $X = \text{Coker } \iota_i(X)$.

Puisque $\text{Coker } \iota_i X \cong 0$ ou $S(i)^m$ pour un certain entier m , et que X est indécomposable et non-isomorphe à $S(i)$, on a : $X = S_i^- \circ S_i^+(X)$.

Ainsi, $X = S_i^-(Y) \oplus S_i^-(Z)$ et donc $S_i^-(Y) = 0$. Dès lors, $Y = 0$ ou $Y \cong S(i)^m$ pour un entier m .

On a également que $\sigma_i(\dim X) = \dim(S_i^+(X))$. Puisque Z est lui aussi indécomposable et non isomorphe à $S(i)$, on montre avec l'analogie du lemme 2.2.3 pour S_i^- que $\sigma_i(\dim Z) = \dim(S_i^-(Z))$.

Or, $\dim(X) = \sigma_i^2(\dim X) = \sigma_i(\dim S_i^+(X)) = \sigma_i(\dim Y) + \sigma_i(\dim Z) = \sigma_i(\dim Y) + \dim X$.

On en déduit que $\sigma_i(\dim Y) = 0$ et donc que $Y = 0$.

ii. \implies iii. Direct.

iii. \implies iv. D'après le lemme 2.2.3 ii. : $X = S_i^- \circ S_i^+(X) \oplus \text{Coker } \iota_i(X)$.

Dès lors, puisque X est indécomposable et $S_i^+(X) \neq 0$, on a : $0 \neq S_i^- \circ S_i^+(X)$ et donc $X \cong S_i^- \circ S_i^+(X)$.

iv. \implies v. On a $\text{Coker } \iota_i(X) = 0$, donc ξ est surjective.

v. \implies vi. Puisque ξ est surjective, $\text{Coker } \iota_i(X) = 0$ et donc d'après le lemme 2.2.3 iii. : $\sigma_i(\dim X) = \dim Y \geq 0$. Si pour tout $j \neq i$, $X_j = 0$, alors $X \cong S(i)$ par indécomposabilité, et donc $\sigma_i(\dim X) = -e_i < 0$, contradiction.

Ainsi, il existe $j \neq i$ tel que $X_j \neq 0$ et donc $\sigma_i(\dim X)_j = \dim X_j > 0$.

vi. \implies i. Si pour tout $j \neq i$, $X_j = 0$, alors $\sigma_i(\dim X) < 0$. Donc il existe $j \neq i$ tel que $X_j \neq 0$ et ainsi, $X \not\cong S(i)$.

v. \implies vii. Si ξ est surjectif, alors $\text{Coker } \iota_i(X) = 0$.

vii. \implies i. Si $X \cong S(i)$, alors : $\dim S_i^+(X) = 0$ et $\sigma(\dim X) = -e_i \neq 0$.

✂

Remarque. On peut adapter les lemmes 2.2.3 et 2.2.4 aux foncteurs S_i^- .

2.3 Foncteurs de Coxeter

Définition 2.3.1 (Foncteurs de Coxeter) Soit Q un carquois et i_1, \dots, i_n un ordre admissible des sommets de Q . Le foncteur de Coxeter pour cet ordre est le foncteur :

$$C^+ = S_{i_n}^+ \circ \dots \circ S_{i_1}^+ : \text{Rep}_k(Q) \rightarrow \text{Rep}_k(Q)$$

On définit de manière analogue le foncteur :

$$C^- = S_{i_1}^- \circ \dots \circ S_{i_n}^- : \text{Rep}_k(Q) \rightarrow \text{Rep}_k(Q)$$

Et on notera, pour $r \in \mathbb{Z}$:

$$C^r = \begin{cases} (C^-)^r & \text{si } r < 0 \\ \text{Id} & \text{si } r = 0. \\ (C^+)^r & \text{si } r > 0 \end{cases}$$

Lemme 2.3.2 Les foncteurs C^+ et C^- ne dépendent pas du choix de l'ordre admissible.

Preuve. Si i et j sont deux puits distincts de Q , alors i (resp. j) est un puits de $\sigma_j Q$ (resp. $\sigma_i Q$) et $S_i^+ \circ S_j^+ = S_j^+ \circ S_i^+$. Soient maintenant deux ordres admissibles i_1, \dots, i_n et i'_1, \dots, i'_n des sommets de Q . Pour tout entier $1 \leq m \leq n$, il existe un unique entier $\varphi(m)$ tel que $i_m = i'_{\varphi(m)}$. On va noter, pour tout entier $1 \leq m \leq n$, $\psi(m) := \max_{1 \leq j \leq m} \varphi(j)$.

Montrons alors par récurrence sur m que pour tout $1 \leq m \leq n$, la propriété suivante est vérifiée :

$$(P_m) : S_{i'_{\psi(m)}}^+ \circ \dots \circ S_{i'_1}^+ = \underbrace{S_{i'_{\psi(m)}}^+ \circ \dots \circ S_{i'_1}^+}_{\text{sans les } S_{i'_{\varphi(j)}}^+, 1 \leq j \leq m} \circ S_{i'_m}^+ \circ \dots \circ S_{i'_1}^+$$

Supposons $m = 1$. Si l'un des sommets $i'_1, \dots, i'_{\varphi(1)-1}$ (disons i'_j) était relié à $i'_1 = i_1$ (qui est un puits de Q), alors ce serait nécessairement par une arête $\alpha : i'_j \rightarrow i_1$. Or, $i_1 = i'_{\varphi(1)}$ apparaît après i'_j dans l'ordre admissible i'_1, \dots, i'_n . L'arête α n'a donc pas été renversée dans $\sigma_{i'_{j-1}} \dots \sigma_{i'_1} Q$, et donc i'_j n'en n'est pas un puits, ce qui contredit l'admissibilité de l'ordre i'_1, \dots, i'_n . Les sommets $i'_1, \dots, i'_{\varphi(1)-1}$ ne sont donc pas reliés à $i'_1 = i_1$. Dès lors, on a bien : $(P_1) : S_{i'_{\psi(1)}}^+ \circ \dots \circ S_{i'_1}^+ = S_{i'_{\psi(1)-1}}^+ \circ \dots \circ S_{i'_{-1}}^+ \circ S_{i'_1}^+$.

Si maintenant on se donne $1 \leq m \leq n - 1$ et que l'on suppose (P_m) vérifiée, alors par hypothèse de récurrence, puisque $\psi(m+1) \geq \psi(m)$:

$$S_{i'_{\psi(m+1)}}^+ \circ \dots \circ S_{i'_1}^+ = \underbrace{S_{i'_{\psi(m+1)}}^+ \circ \dots \circ S_{i'_1}^+}_{\text{sans les } S_{i'_{\varphi(j)}}^+, 1 \leq j \leq m} \circ S_{i'_m}^+ \circ \dots \circ S_{i'_1}^+$$

Considérons un sommet $i'_l \in \{i'_{\psi(m+1)}, \dots, i'_1\} \setminus \{i'_{\varphi(m+1)}, \dots, i'_{\varphi(1)}\}$. Si i'_l et $i'_{\varphi(m+1)}$ ne sont pas reliés par une arête, alors les foncteurs de réflexion correspondant commutent. Sinon, puisque $i'_{\varphi(m+1)}$ est un puits de $\sigma_{i'_m} \dots \sigma_{i'_1} Q$, cette arête est initialement orientée de i'_l vers $i'_{\varphi(m+1)}$. En outre, i'_l est un puits de $\sigma_{i'_{l-1}} \dots \sigma_{i'_1} Q$, donc $i'_{\varphi(m+1)} = i'_{\varphi(m+1)}$ apparaît parmi i'_{l-1}, \dots, i'_1 , c'est-à-dire que $l > \varphi(m+1)$.

Ainsi, $S_{i'_{\varphi(m+1)}}^+$ commute avec les $S_{i'_j}$, où $j \in \llbracket 1, \varphi(m+1) - 1 \rrbracket \setminus \{\varphi(1), \dots, \varphi(m)\}$. Et donc :

$$S_{i'_{\varphi(m+1)}}^+ \circ \dots \circ S_{i'_1}^+ = \underbrace{S_{i'_{\varphi(m+1)}}^+ \circ \dots \circ S_{i'_1}^+}_{\text{sans les } S_{i'_{\varphi(j)}}^+, 1 \leq j \leq m+1} \circ S_{i'_{m+1}}^+ \circ \dots \circ S_{i'_1}^+$$

✂

Remarque. On supposera par la suite que $Q_0 = \llbracket 1, n \rrbracket$ et que $1, \dots, n$ est un ordre admissible.

Alors pour deux sommets $j_1 < j_2$, il n'existe pas d'arête orientée de j_1 vers j_2 , puisque j_1 est un puits de $\sigma_{j_1-1} \dots \sigma_1 Q$. Dès lors, il n'existe pas de chemin de j_1 à j_2 .

Lemme 2.3.3 Soit i un sommet de Q .

- i. $\dim P(i) = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_{i-1}(e_i)$ et $\dim I(i) = \sigma_n \circ \dots \circ \sigma_{i+1}(e_i)$.
- ii. $P(i) \cong S_1^- \circ \dots \circ S_{i-1}^-(S(i))$ et $I(i) \cong S_n^- \circ \dots \circ S_{i+1}^-(S(i))$

Preuve. Montrons simplement le résultat pour les représentations projectives, les preuves pour les représentations injectives étant similaires.

- i. Montrons par récurrence que pour tout $1 \leq l < i$, $(E_l) : \sigma_{i-l} \circ \dots \circ \sigma_{i-1}(e_i) = \sum_{j=0}^l \text{Card } Q(i, i-j)e_{i-j}$, où, étant donné un sommet j , $Q(i, j)$ désigne l'ensemble des chemins de i à j .

En particulier, on aura, pour $l = i - 1$, $\sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_{i-1}(e_i) = \sum_{j=1}^i Q(i, j)e_j = \dim P(i)$, d'après la remarque précédente.

Si $l = 1$, on a $\langle e_i, e_{i-1} \rangle = \text{Card } Q(i, i-1)$ et $1 = \text{Card } Q(i, i)$, toujours d'après la remarque précédente. Dès lors, on obtient : $\sigma_{i-1}(e_i) = e_i - \langle e_i, e_{i-1} \rangle e_{i-1} = Q(i, i)e_i + Q(i, i-1)e_{i-1}$.

Soit maintenant $1 \leq l < i - 1$. On suppose que l'égalité E_l est vérifiée. Alors :

$$\begin{aligned} \sigma_{i-l-1} \circ \dots \circ \sigma_{i-1}(e_i) &= \sum_{j=0}^l \text{Card } Q(i, i-j) \sigma_{i-l-1}(e_{i-j}) \\ &= \sum_{j=0}^l \text{Card } Q(i, i-j) (e_{i-j} - \langle e_{i-j}, e_{i-l-1} \rangle e_{i-l-1}) \\ &= \sum_{j=0}^l \text{Card } Q(i, i-j) e_{i-j} + \sum_{j=0}^l \text{Card } Q(i, i-j) \text{Card} \{ \alpha : i-j \rightarrow i-l-1 \in Q_1 \} \cdot e_{i-l-1} \end{aligned}$$

Or, puisque qu'un chemin de i à $i-l-1$ soit d'abord passer par un sommet $i-j$, pour un $0 \leq j \leq l$:

$$\begin{aligned} \text{Card } Q(i, i-l-1) &= \sum_{j=0}^l \text{Card} \{ \alpha \cdot c \mid c \in Q(i, i-j), \alpha : i-j \rightarrow i-l-1 \in Q_1 \} \\ &= \sum_{j=0}^l Q(i, i-j) \cdot \text{Card} \{ \alpha \mid \alpha : i-j \rightarrow i-l-1 \in Q_1 \} \end{aligned}$$

Donc on a bien l'égalité (E_{l+1}) .

- ii. En utilisant le lemme 2.2.4, puisque $P(i)$ est indécomposable, pour tout $1 \leq l < i$:

$$\dim S_l^+ \circ \dots \circ S_1^+(P(i)) = \sigma_l(\dim S_{l-1}^+ \circ \dots \circ S_1^+(P(i)))$$

Ainsi, on a : $\dim S_{i-1}^+ \circ \dots \circ S_1^+(P(i)) = \sigma_{i-1} \circ \dots \circ \sigma_1(\dim P(i)) = \sigma_{i-1} \circ \dots \circ \sigma_1 \circ \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_{i-1}(e_i) = e_i$.

Dès lors, on a nécessairement : $S_{i-1}^+ \circ \dots \circ S_1^+(P(i)) \cong S(i)$ et donc en utilisant le lemme 2.2.4 :

$$P(i) \cong S_1^- \circ \dots \circ S_{i-1}^-(S(i))$$

✂

On est désormais en mesure de montrer que la définition de la transformation de Coxeter est indépendante du choix de l'ordre admissible.

Lemme 2.3.4

- i. $\forall i \in Q_0, c(\dim P(i)) = \dim I(i)$
 ii. $(\dim P(i))_{i \in Q_0}$ et $(\dim I(i))_{i \in Q_0}$ sont deux bases de \mathbb{Z}^n .

Preuve.

- i. D'après le lemme 2.3.3, on a :

$$c(\dim P(i)) = c \circ \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_{i-1}(e_i) = \sigma_n \circ \dots \circ \sigma_i(e_i) = -\sigma_n \circ \dots \circ \sigma_{i+1}(e_i) = -\dim I(i)$$

- ii. Pour tout sommet i :

$$e_i = \sum_{j \in Q_0} \left(\text{Card } Q(i, j) - \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ s(\alpha)=i}} \text{Card } Q(t(\alpha), j) \right) e_j = \dim P(i) - \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ s(\alpha)=i}} \dim P(t(\alpha))$$

✂

Lemme 2.3.5 Soient $x, y \in \mathbb{Z}^n$.

- i. Pour tout sommet i , $\langle \dim P(i), x \rangle = x_i = \langle x, \dim I(i) \rangle$.
 ii. $\langle x, y \rangle = -\langle y, c(x) \rangle = \langle c(x), c(y) \rangle$.

2.4 Représentations préprojectives et préinjectives

Théorème 2.4.1 Soit X une représentation indécomposable de Q .

- i. Si pour un sommet i , $X \cong P(i)$, alors $C^+(X) = 0$. Sinon, $C^- \circ C^+ X \cong X$.
- ii. Si pour un sommet i , $X \cong I(i)$, alors $C^-(X) = 0$. Sinon, $C^+ \circ C^- X \cong X$.

Preuve. Montrons uniquement le point i.

D'après le lemme 2.3.3, on a : $P(i) \cong S_1^- \circ \dots \circ S_{i-1}^-(S(i))$. Dès lors, d'après le lemme 2.2.4 :

$$C^+(P(i)) = S_n^+ \circ \dots \circ S_i^+(S(i)) = 0$$

Si maintenant $X \not\cong P(i)$ pour tout sommet i , alors par le lemme 2.2.4 :

$$C^- \circ C^+(X) = S_1^- \circ \dots \circ S_n^- \circ S_n^+ \circ \dots \circ S_1^+(X) \cong X$$



Définition 2.4.2 (Représentations préprojectives et préinjectives) Soit X une représentation indécomposable de Q .

- i. X est dite préprojective s'il existe $r \leq 0$ et $i \in Q_0$ tel que : $X \cong C^r(P(i))$.
- ii. X est dite préinjective s'il existe $r \geq 0$ et $i \in Q_0$ tel que : $X \cong C^r(I(i))$.
- iii. X est dite régulière si $C^r(X) \neq 0$ pour tout $r \in \mathbb{Z}$.

Remarque. Cette définition est exhaustive, d'après le théorème 2.4.1.

Théorème 2.4.3 (Identification des préprojectifs et préinjectifs) Si X, Y sont deux représentations indécomposables, avec X préprojective (resp. préinjective), alors $X \cong Y$ si et seulement si $\dim X = \dim Y$. De plus, pour tous sommets i, j et entiers r, s :

- i. $C^r(P(i)) = C^s(P(j)) \neq 0 \implies i = j$ et $r = s$
- ii. $C^r(I(i)) = C^s(I(j)) \neq 0 \implies i = j$ et $r = s$

Preuve. Si X est une représentation préprojective, disons $X \cong C^r(P(i))$, alors par le lemme 2.3.3 :

$$\dim X = (\sigma_n \circ \dots \circ \sigma_1)^r \circ \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_{i-1}(e_i)$$

En utilisant le lemme 2.2.4, on déduit que : $S_{i-1}^+ \circ \dots \circ S_1^+ \circ C^{-r}(Y) \cong S(i)$ et donc : $Y \cong C^r \circ S_1^- \circ \dots \circ S_{i-1}^-(S(i)) \cong X$. On raisonne de même dans le cas préinjectif. Démontrons maintenant le point i, la preuve du point ii. étant encore une fois similaire.

Si $C^r(P(i)) \cong C^s(P(j)) \neq 0$, alors $P(i) \cong C^{s-r}P(j)$ d'après le théorème 2.4.1, et donc $s - r \geq 0$. Par symétrie des rôles, on a également : $r - s \geq 0$ et donc $s = r$. Enfin, le théorème 1.3.5 nous donne $i = j$.



Exemple 2.4.4 Calculons les représentations préinjectives et préprojectives du carquois Q à n sommets :

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \dots \longrightarrow n-1 \longrightarrow n$$

On va voir que ces représentations sont en bijection avec les intervalles de $\llbracket 1, n \rrbracket$, dans le sens où pour $1 \leq i \leq j \leq n$, on associe à l'intervalle $\llbracket i, j \rrbracket$ la représentation X telle que :

$$\forall l \in Q_0, X_l = \begin{cases} k & \text{si } i \leq l \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } \forall \alpha \in Q_1, X_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leq s(\alpha) < j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

C'est-à-dire la représentation :

$$\cdots \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \underset{\text{sommet } i}{k} \xrightarrow{1} k \xrightarrow{\cdots} \cdots \xrightarrow{\cdots} \underset{\text{sommet } j}{k} \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \cdots$$

Montrons que la représentation $\llbracket i, j \rrbracket$ est envoyée par C^+ sur la représentation $\llbracket i + 1, j + 1 \rrbracket$ si $j < n$ (et sur 0 sinon). Un ordre admissible de Q est $n, n - 1, \dots, 1$. Dans la suite, lorsque l'on dessinera une représentation, on supposera que les application dont l'arrivée ou le départ est 0 sont nulles et que les applications entre deux espaces k sont l'identité. De plus, on notera k_l l'espace k situé au sommet l et on indiquera en gras le puits sur lequel on applique notre foncteur de réflexion.

Un foncteur de réflexion S_i^+ appliqué à un puits de la forme $k \rightarrow 0 \leftarrow 0$ donnera une source de la forme $k \leftarrow k \rightarrow 0$, puisque le noyau est k . Appliqué à un puits de la forme $k \rightarrow k \leftarrow k$, on obtiendra $k \leftarrow k \rightarrow k$, là encore le noyau est k . Enfin, pour un puits de la forme $0 \rightarrow k \leftarrow k$, on obtiendra $0 \leftarrow 0 \rightarrow k$, puisque le noyau est nul.

$$\begin{aligned} C^+(\llbracket i, j \rrbracket) &= S_1^+ \dots S_n^+(\llbracket i, j \rrbracket) = S_1^+ \dots S_{n-1}^+(0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \rightarrow 0 \rightarrow k_i \rightarrow k_{i+1} \rightarrow \cdots \rightarrow k_j \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \rightarrow 0 \leftarrow 0) \\ &= \cdots = S_1^+ \dots S_{j+1}^+(0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \rightarrow 0 \rightarrow k_i \rightarrow k_{i+1} \rightarrow \cdots \rightarrow k_j \rightarrow 0 \leftarrow 0 \rightarrow \cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0) \\ &= \cdots = S_1^+ \dots S_j^+(0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \rightarrow 0 \rightarrow k_i \rightarrow k_{i+1} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbf{k}_j \leftarrow k_{j+1} \rightarrow \cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0) \\ &= \cdots = S_1^+ \dots S_i^+(0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbf{k}_i \leftarrow k_{i+1} \rightarrow \cdots \rightarrow k_{j+1} \rightarrow \cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0) \\ &= S_1^+ \dots S_{i-1}^+(0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \rightarrow 0 \leftarrow 0 \rightarrow k_{i+1} \rightarrow \cdots \rightarrow k_{j+1} \rightarrow \cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0) \\ &= \cdots = \llbracket i + 1, j + 1 \rrbracket \end{aligned}$$

Remarquons enfin que pour un sommet i donné, la représentation $I(i)$ correspond à l'intervalle $\llbracket 1, i \rrbracket$, qui est donc bien envoyée sur 0 par C^+ . De la même manière, la représentation $\llbracket i, j \rrbracket$ est envoyée par C^+ sur la représentation $\llbracket i - 1, j - 1 \rrbracket$ si $i > 1$ (et sur 0 sinon) et pour un sommet i donné, la représentation $P(i)$ correspond à l'intervalle $\llbracket i, n \rrbracket$. Les intervalles de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sont donc bien les représentations préinjectives et préprojectives du carquois Q . Il est à noter que toutes ces représentations sont à la fois préinjectives et préprojectives.

À présent, calculons les représentations préinjectives et préprojectives du carquois de Kronecker :

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} 2$$

Les représentations projectives et injectives de ce carquois sont :

$$\begin{aligned} - P(1) : k \begin{array}{c} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \\ \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \end{array} k^2 \quad \text{et} \quad P(2) = S(2) : 0 \begin{array}{c} \xrightarrow{0} \\ \xrightarrow{0} \end{array} k \\ - I(1) = S(1) : k \begin{array}{c} \xrightarrow{0} \\ \xrightarrow{0} \end{array} 0 \quad \text{et} \quad I(2) : k^2 \begin{array}{c} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \\ \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}} \end{array} k \end{aligned}$$

Dans la suite, on notera $(n + 1, n)$ la représentation : $k^{n+1} \begin{array}{c} \xrightarrow{\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}} \\ \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & I_n \end{pmatrix}} \end{array} k^n$ et $(n + 1, n)^{\text{op}}$ la représentation :

$$k^{n+1} \begin{array}{c} \xleftarrow{\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}} \\ \xleftarrow{\begin{pmatrix} I_n & 0 \end{pmatrix}} \end{array} k^n .$$

Alors si $n \in \mathbb{N}$, on a : $C^+((n + 1, n)) = S_1^+ \circ S_2^+((n + 1, n)) = S_1^+((n + 1, n + 2)^{\text{op}}) = (n + 3, n + 2)$. Dès lors, en remarquant que les représentations $I(1)$ et $I(2)$ sont respectivement les représentations de vecteur dimension $(1, 0)$ et $(2, 1)$, on conclue que les représentations préinjectives sont exactement les $(n + 1, n)$, $n \in \mathbb{N}$.

De même, si on note $(n, n + 1)$ la représentation : $k^n \begin{array}{c} \xrightarrow{\begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix}} \\ \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ I_n \end{pmatrix}} \end{array} k^{n+1}$, on remarque que $P(1)$ (resp. $P(2)$) est la

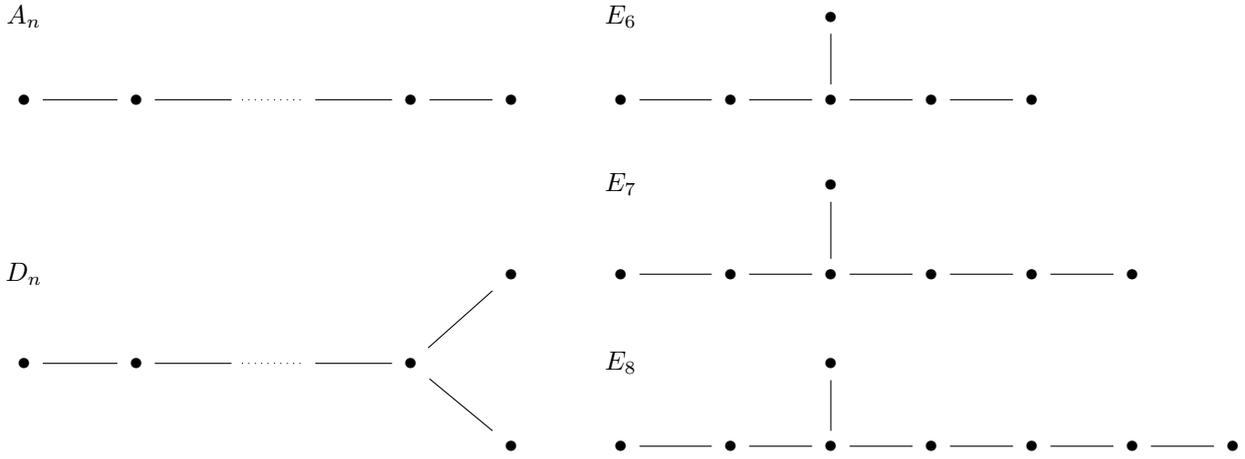
représentation $(1, 2)$ (resp. $(0, 1)$) et les représentations préprojectives sont exactement les $(n, n + 1)$. On peut alors résumer les représentations préprojectives et préinjectives (les foncteurs C^+ et C^- ajoutent 2 à chaque composante des vecteurs dimensions) :

- $\forall n \in \mathbb{N}, (2n + 1, 2n) = C^n(I(1))$ et $(2n + 2, 2n + 1) = C^n(I(2))$
- $\forall n \in \mathbb{N}, (2n, 2n + 1) = C^{-n}(P(2))$ et $(2n + 1, 2n + 2) = C^{-n}(P(1))$

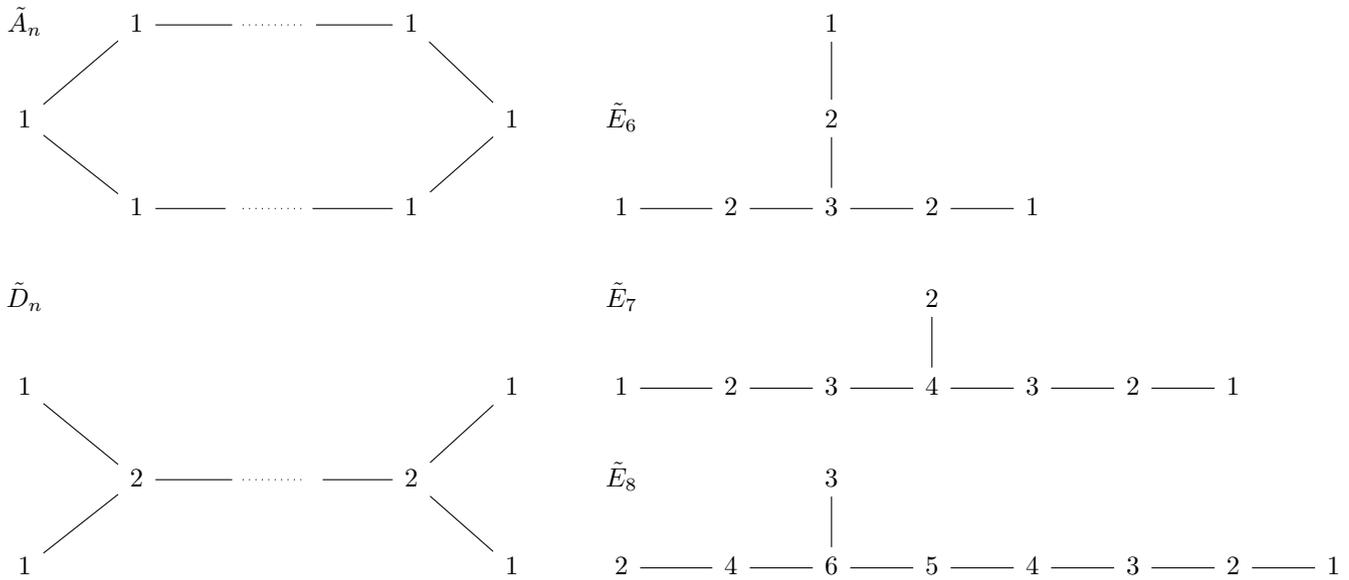
3 Graphes finis

3.1 Graphes de Dynkin et euclidiens

On appelle graphe fini un carquois dont on a retiré l'orientation des arêtes. Nous allons distinguer plusieurs classes de graphes finis, les diagrammes de Dynkin (à n sommets) :



Et les diagrammes euclidiens (à $n + 1$ sommets, $n \geq 0$ pour \tilde{A}_n et $n \geq 4$ pour \tilde{D}_4) auxquels on associe un vecteur δ de \mathbb{Z}^{n+1} dont les coordonnées sont données par les sommets :

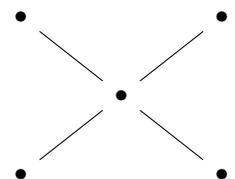


Le fait que l'on distingue ces diagrammes particuliers est expliqué en théorie des graphes par le lemme suivant :

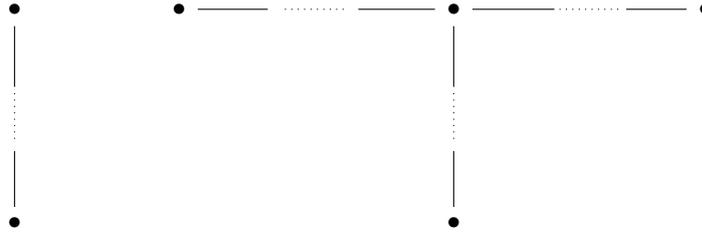
Lemme 3.1.1 Soit Γ un graphe fini connexe. Alors Γ est soit de type Dynkin, soit contient un diagramme euclidien.

Preuve. Soit Γ ne contenant aucun diagramme euclidien. Montrons qu'il est de type Dynkin. Puisque Γ ne contient ni \tilde{A}_0 : $\bullet \circlearrowleft$ ni \tilde{A}_1 : $\bullet \text{---} \text{---} \text{---} \bullet$, il ne contient ni boucle, ni arêtes multiples. En outre, puisque Γ ne contient pas les $\tilde{A}_m, m \geq 2$, il est acyclique. C'est donc un arbre (un graphe connexe, sans boucles, arêtes multiples et cycles). On appellera degré d'un sommet de Γ le nombre de sommets qui lui sont relié par une arête.

Les sommets de Γ sont de degré inférieur ou égal à 3, car sinon Γ contiendrait le graphe \tilde{D}_4 :



De plus, Γ contient au plus un sommet de degré 3, car sinon il contiendrait l'un des $\tilde{D}_m, m > 4$. Dès lors, Γ a l'une des deux formes suivantes :



Si Γ est de la forme de gauche, il est de type A_n . Sinon, on note m, n et p le nombre d'arêtes de chacune des branches partant du sommet de degré 3 de Γ , avec disons $0 < m \leq n \leq p$. Il est alors nécessaire de distinguer plusieurs cas :

- Si $m \geq 2$, alors Γ contient \tilde{E}_6 , ce qui est impossible.
- Si $n = 1$, alors Γ est de la forme D_n .
- Si $m = 1$ et $n \geq 2$:
 - Si $n > 2$, alors Γ contient \tilde{E}_7 , impossible.
 - Si $n = 2$, alors $p \leq 4$, car Γ ne contient pas \tilde{E}_8 . Donc Γ est de la forme E_6, E_7 ou E_8 .



3.2 Forme de Tits et systèmes de racines

Définition 3.2.1 (Forme de Tits) Soit Γ un graphe fini à n sommets. Pour tous sommets i, j , on note $d_{ij} = d_{ji}$ le nombre d'arêtes reliant i et j .

i. On associe à Γ la forme bilinéaire symétrique $(\cdot, \cdot) : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, (e_i, e_j) = \begin{cases} -d_{ij} & \text{si } i \neq j \\ 2 - 2d_{ii} & \text{si } i = j \end{cases}$$

ii. La forme de Tits associée à Γ est la forme quadratique $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{Z}^n, q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i \leq j} d_{ij} x_i x_j$$

Remarque. Si Q est un carquois, alors la forme bilinéaire symétrique associée à Q coïncide avec celle associée à son graphe sous-jacent Γ .

Exemple 3.2.2 i. La forme de Tits associée au graphe A_n est :

$$q : \begin{cases} \mathbb{Z}^n & \longrightarrow \mathbb{Z} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} = \frac{1}{2} \left(x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 + x_n^2 \right) \end{cases}$$

ii. La forme de Tits associée à \tilde{A}_1 (le graphe sous-jacent du carquois de Kronecker) est :

$$q : \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow \mathbb{Z} \\ (x, y) & \longmapsto x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \end{cases}$$

Lemme 3.2.3 Soit Γ un graphe fini connexe tel qu'il existe un élément strictement positif du noyau $N(q)$ de q , noté y . Alors y est un vecteur sincère (aucune de ses coordonnées n'est nulle) et q est semi-définie positive. De plus, pour tout vecteur $x \in \mathbb{Z}^n$:

$$q(x) = 0 \iff x \in \mathbb{Q}y \iff x \in N(q)$$

Preuve. Pour tout $1 \leq i \leq n, 0 = (e_i, y) = (2 - 2d_{ii})y_i - \sum_{j \neq i} d_{ij}y_j$. Ainsi, si $y_i = 0$, alors $\sum_{j \neq i} d_{ij}y_j = 0$. Or, pour tout sommet $j \neq i, d_{ij}y_j \geq 0$ et donc si j est voisin de $i, y_j = 0$. Par connexité de Γ , on déduit que si l'un des y_i est

nul, alors le vecteur y est également nul. Dès lors, y est bien un vecteur sincère.

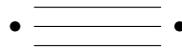
Montrons maintenant que q est semi-définie positive. Si $x \in \mathbb{Z}^n$:

$$\begin{aligned} q(x) &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i < j} d_{ij} x_i x_j &&= \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2y_i} (2 - 2d_{ii}) y_i - \sum_{i < j} d_{ij} x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2y_i} \sum_{j \neq i} d_{ij} y_j - \sum_{i < j} d_{ij} x_i x_j = \sum_{i < j} d_{ij} \frac{y_j}{2y_i} x_i^2 - \sum_{i < j} d_{ij} x_i x_j + \sum_{i < j} d_{ij} \frac{y_i}{2y_j} x_j^2 \\ &= \sum_{i < j} d_{ij} \frac{y_i y_j}{2} \left(\frac{x_i}{y_i} - \frac{x_j}{y_j} \right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Enfin, si $q(x) = 0$, on a : $\frac{x_i}{y_i} = \frac{x_j}{y_j}$ pour tous sommets $i < j$ reliés par une arête. Puisque Γ est connexe, on a bien que $x \in \mathbb{Q}y$. Les autres implications sont claires.



Remarque. L'élément y n'existe pas toujours. Si l'on considère le graphe composé d'une arête triple entre deux sommets :



La forme de Tits associée est $q : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 3xy$ et la forme bilinéaire correspondante est :

$$b : ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto x_1 x_2 + y_1 y_2 - \frac{3}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

Ainsi, si $u = (x, y)$ est un vecteur du noyau de q , on a : $b(u, (1, 0)) = 0 = x - \frac{3}{2}y$ et $b(u, (1, 1)) = 0 = x + y - \frac{3}{2}(x + y)$. On en déduit que $u = 0$ et donc que $N(q) = \{0\}$.

Lemme 3.2.4 Soit Q un carquois et $x \in \mathbb{Z}^n$. Alors x est un point fixe de la transformation de Coxeter c si et seulement si $x \in N(q)$.

Preuve. On suppose que $1, \dots, n$ est un ordre admissible de Q . Pour tout $x \in \mathbb{Z}^n$, on montre par récurrence que si x est point fixe de c , alors la i -ème coordonnée de $c(x)$ est $\sigma_i(x)_i$. Dès lors, il est clair que :

$$\forall x \in \mathbb{Z}^n, c(x) = x \iff \forall i, x_i = c(x)_i = \sigma_i(x)_i \iff \forall i, (x, e_i) = 0 \iff x \in N(q)$$



Théorème 3.2.5 (Caractérisation des formes de Tits) Soit Γ un graphe fini connexe à n sommets et q sa forme de Tits.

- i. Γ est un diagramme de Dynkin si et seulement si q est définie positive.
- ii. Γ est un diagramme euclidien si et seulement si q est semi-définie positive et non définie positive. Dans ce cas, il existe un unique vecteur $\delta \in \mathbb{Z}^n$ tel que $N(q) = \mathbb{Z}\delta$.

Preuve. Si Γ est un diagramme euclidien, alors on considère comme vecteur δ celui associé au graphe. En calculant les différentes formes de Tits et en les évaluant en δ , on voit qu'il s'agit bien d'un vecteur positif du noyau de q (donc q n'est pas définie positive). Le lemme 3.2.3 nous donne que q est semi-définie positive et que $N(q) = \mathbb{Q}\delta \cap \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}\delta$ (puisque une coordonnée de δ est toujours égale à 1). En particulier, puisque δ est sincère, le noyau de q l'est.

Si Γ est un diagramme de Dynkin, alors on remarque qu'en supprimant un sommet s bien choisi d'un diagramme euclidien $\tilde{\Gamma}$ (de forme de Tits \tilde{q}), on obtient Γ . Dès lors, pour tout vecteur $x \in \mathbb{Z}^n$ non nul, si \tilde{x} est le vecteur de \mathbb{Z}^{n+1} à partir de x en ajoutant une coordonnée e nulle, on a : $q(x) = \tilde{q}(\tilde{x}) > 0$. En effet, $\tilde{x} \notin N(\tilde{q})$ car il n'est pas sincère, et donc d'après le lemme 3.2.3, il n'annule pas \tilde{q} .

Si Γ n'est ni Dynkin, ni Euclidien, alors il contient un sous-graphe strict euclidien Γ' (de forme de Tits q') d'après le lemme 4.1.1. Si Γ et Γ' ont les mêmes sommets, on pose $x = \delta$ et alors : $q(x) < q'(x) = 0$.

Sinon, on se donne un sommet i de Γ et non de Γ' relié à Γ' par au moins une arête, et on pose $x = 2\delta + e_i$, de sorte que : $q(x) = 4q'(\delta) + 1 - 2 \sum_{j \in \Gamma'} d_{ij} \delta_j - d_{ii} \leq 1 - 2 \sum_{j \in \Gamma'} d_{ij} \leq -1 < 0$.

Ce dernier point nous montre les réciproques des deux équivalences que l'on cherchait à démontrer.



On introduit maintenant un nouvel objet associé à un graphe, les racines.

Définition 3.2.6 (Racine) Soit Γ un diagramme de Dynkin ou euclidien. Les racines associées à Γ sont les éléments non nuls de :

$$\Delta = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid q(x) = 0 \text{ ou } 1\}$$

Théorème 3.2.7 Soit Γ un diagramme de Dynkin ou euclidien.

- i. Chaque e_i est une racine.
- ii. $\forall x \in \Delta, \forall y \in N(q), y \pm x \in \Delta$
- iii. Une racine est soit (strictement) positive, soit (strictement) négative.
- iv. Si Γ est euclidien, alors $\Delta/N(q)$ est fini.
- v. Si Γ est Dynkin, alors Δ est fini.

Preuve.

iii. Soit x une racine, que l'on écrit $x = x^+ - x^-$, où x^+ et x^- sont des vecteurs positifs de supports disjoints (*i.e.* $\forall i, x_i^+ \neq 0 \iff x_i^- = 0$). Alors :

$$1 \geq q(x) = q(x^+) + q(x^-) - (x^+, x^-) = q(x^+) + q(x^-) + \sum_{i \neq j} x_i^+ x_j^- d_{ij} \geq 0$$

Ainsi, puisque que q est à valeurs dans \mathbb{N} , on a $q(x^+) = 0$ ou $q(x^-) = 0$. Dès lors, si x^+ et x^- étaient non nuls, ils seraient tous deux sincères, ce qui est impossible car ils sont à supports disjoints. Ainsi, x^+ ou x^- est nul.

iv. Soit i un sommet. Si x est une racine avec $x_i = 0$, alors les coordonnées i de $x - \delta$ et de $x + \delta$ sont positives. De plus, d'après les points ii. et iii., ces deux vecteurs sont des racines positives. Ainsi :

$$\{x \in \Delta \mid x_i = 0\} \subset \{x \in \mathbb{Z}^n \mid -\delta \leq x \leq \delta\}$$

L'ensemble de gauche est donc fini.

Si maintenant $x \in \Delta$, il existe un sommet i tel que $x - x_i \delta \in \{x \in \Delta \mid x_i = 0\}$, car δ a une coordonnée égale à 1. Dès lors, $\{x \in \Delta \mid x_i = 0\}$ est une famille de représentants des classes d'équivalences qui forment l'ensemble $\Delta/N(q)$, qui est donc fini.

v. Soit $\tilde{\Gamma}$ un diagramme euclidien tel qu'il donne Γ lorsqu'on lui retire un sommet i . Une racine x de Γ est une racine de $\tilde{\Gamma}$ si l'on pose $x_i = 0$ et donc Δ est fini d'après l'inclusion démontrée au dernier point.



Remarque.

- Les preuves des points iv. et v. nous donnent une borne pour les racines d'un diagramme de Dynkin Γ inclu dans un diagramme inclu $\tilde{\Gamma}$: si x est une racine positive de Γ , $\max_i x_i \leq \max_i \delta_i$. Ceci nous permet notamment de chercher les racines de manière algorithmique, en testant tous les vecteurs jusqu'à un certain point.
- Si x est une racine, alors $\sigma_i(x)$ aussi d'après les points i. et ii., puisque $\sigma_i(x) = x - 2 \frac{(x, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$.

Exemple 3.2.8 Calculons les racines (positives) des diagrammes A_n , dont on a exhibé la forme de Tits précédemment. Puisque le graphe est Dynkin, la forme de Tits est définie positive et il nous suffit donc de résoudre dans \mathbb{Z}^n l'équation :

$$\frac{1}{2} \left(x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 + x_n^2 \right) = 1$$

Ainsi, si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ est une racine positive, on a : $x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 + x_n^2 = 2$. Dès lors, puisque $2^2 = 4 > 2$, on a : $\forall 1 \leq i \leq n-1, |x_i - x_{i+1}| \in \{0, 1\}$ et $x_1, x_n \in \{0, 1\}$.

Si l'un des x_i est ≥ 2 , notons j_0 (resp. j_1) l'indice minimal (resp. maximal) tel que c'est le cas. Dès lors, $x_{j_0-1} = 1$ et $x_{j_1+1} = 1$, car $|x_{j_0-1} - x_{j_0}| = |x_{j_1} - x_{j_1+1}| = 1$. Dès lors, puisque $q(x) = 1$, on a : $|x_i - x_{i+1}| = 0$ si $i \notin \{j_0 - 1, j_1\}$. Ainsi, $x_1 = \dots = x_{j_0-1} = x_{j_1} = \dots = x_n = 1$. Or, $2 \geq x_1^2 + (x_{j_0-1} - x_{j_0})^2 + (x_{j_1} - x_{j_1+1})^2 + x_n^2 = 4$, contradiction. Donc les composantes de x sont à valeurs dans $\{0, 1\}$.

Si maintenant on note i_0 (resp. i_1) l'indice minimal (resp. maximal) des composantes égales à 1. Quitte à noter $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$, on a : $(x_{i_0} - x_{i_0+1})^2 = (x_{i_1} - x_{i_1+1})^2 = 1$ et donc $|x_i - x_{i+1}| = 0$ si $i \notin \{i_0 - 1, i_1\}$. Dès lors, $x_{i_0} = x_{i_0+1} = \dots = x_{i_1} = 1$ et donc $x = \sum_{i=i_0}^{i_1} e_i$.

Réciproquement, il est clair que les $\sum_{i=i_0}^{i_1} e_i$ sont des racines positives. On a donc autant de racines de couples d'entiers $1 \leq i \leq j \leq n$, soit $\frac{n(n+1)}{2}$.

Lemme 3.2.9 Soit Q un carquois de type Dynkin ou euclidien. Si x est une racine positive et si $\sigma_i(x)$ n'est pas positive, alors $x = e_i$.

4 Théorèmes de Gabriel et calculs d'indécomposables

4.1 Le cas Dynkin

Lemme 4.1.1 Soit Q un carquois de type Dynkin et $x \in \mathbb{Z}^n$. Alors il existe un entier $r \geq 0$ tel que $c^r(x)$ n'est pas strictement positif.

Preuve. Soit $x \in \mathbb{Z}^n$. Puisque Δ est fini et stable par c , l'automorphisme c induit une permutation sur Δ et il existe donc un entier h tel que c est égal à l'identité.

Considérons donc le vecteur $y := \sum_{r=0}^{h-1} c^r(x)$, qui est un point fixe de c . Dès lors, d'après le lemme 3.2.4, $y \in N(q) = 0$, puisque q est définie positive d'après la caractérisation des formes de Tits. Ainsi, il existe nécessairement un entier $r \geq 0$ tel que $c^r(x)$ est non strictement positif.

✂

On est désormais en mesure de montrer le théorème de Gabriel sur les carquois de type Dynkin.

Théorème 4.1.2 (Théorème de Gabriel) Soit Q un carquois dont le graphe sous-jacent est de type Dynkin. Alors l'application $X \mapsto \dim X$ induit une bijection entre les classes d'isomorphisme des représentations indécomposables de Q et les racines positives associées au graphe sous-jacent de Q . En particulier, il existe un nombre fini de classes d'isomorphisme de représentations indécomposables.

Preuve. Supposons que $1, \dots, n$ est un ordre admissible de Q . On se donne X une représentation indécomposable de Q de vecteur dimension $x = \dim X$. D'après le lemme 4.1.1, on peut se donner un couple d'entiers naturels (r, s) minimal pour l'ordre lexicographique tel que l'image de x par $\tau := \sigma_s \circ \dots \circ \sigma_1 \circ c^r$ ne soit pas positive strictement. Dès lors, d'après le lemme 2.2.4, puisque X est indécomposable, on a : $S_{s-1}^+ \circ \dots \circ S_1^+ \circ C^r \cong S(s)$, et ainsi :

$$X \cong C^{-r} \circ S_1^- \circ \dots \circ S_{s-1}^-(S(s))$$

De sorte que : $\dim X = c^{-r} \circ \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_s(e_s)$ et est donc une racine positive. En outre, si X' est une représentation indécomposable de même dimension que X , on a directement que $X \cong X'$ en appliquant le même raisonnement à X' .

Réciproquement, si x est une racine positive, on peut se donner un couple (r, s) et une application τ vérifiant les mêmes conditions que précédemment. D'après le lemme 3.2.9, on a alors : $\sigma_s \circ \tau(x) = e_s$.

Dès lors, si on pose $X := C^{-r} \circ S_1^- \circ \dots \circ S_{s-1}^-(S(s))$, on a bien une représentation indécomposable dont le vecteur dimension vaut x .

✂

Remarque.

- En particulier, on voit à travers cette preuve que toutes les représentations indécomposables d'un carquois de type Dynkin sont préinjectives ou préprojectives, en utilisant le lemme 2.3.3.
- Il est surprenant de voir que le nombre de classes d'isomorphismes d'indécomposables d'un carquois Dynkin ne dépend pas de l'orientation ! Ce n'est cependant pas parce que deux carquois ont un même diagramme de Dynkin sous-jacent que ce sont les mêmes objets : par exemple, pour les carquois :

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \qquad 1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3$$

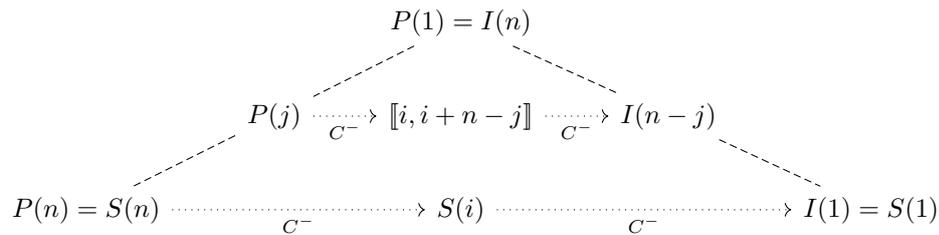
L'algèbre de chemins du premier est engendrée par 6 éléments (les 6 chemins possibles), tandis que l'algèbre de chemins du second est engendrée par 4 éléments seulement. Cela ne démontre pas à proprement parler que les deux catégories des représentations associées à ces carquois sont distinctes, mais c'est bien le cas.

Exemple 4.1.3

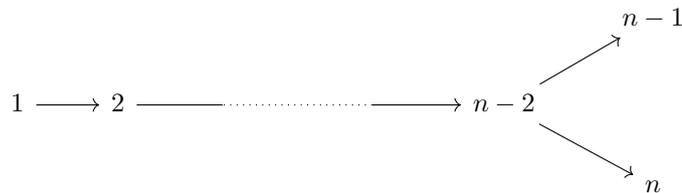
- On a calculé qu'il y avait $\frac{n(n+1)}{2}$ racines associées aux graphes de type A_n . En particulier, on a $\frac{n(n+1)}{2}$ classes d'isomorphismes de représentations indécomposables, ce qui correspond bien à ce que l'on avait annoncé : pour un carquois dont le graphe sous-jacent est de type A_n , il faut $\frac{n(n+1)}{2}$ conditions pour caractériser une classe d'isomorphisme de représentations, par le théorème de Krull-Remak-Schmidt. Revenons à l'étude du carquois :

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \dots \longrightarrow n-1 \longrightarrow n$$

La représentation $[[i, j]]$ correspond à la racine $\sum_{l=i}^j e_l$. On peut résumer les relations entre les représentations indécomposables de ce carquois comme suit, où chaque ligne représente les intervalles de même longueur :



- Traitons maintenant le cas des diagrammes de type D_n , et plus particulièrement l'orientation :



La forme de Tits associée est :

$$q : \begin{cases} \mathbb{Z}^n & \longrightarrow \mathbb{Z} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^{n-3} x_i x_{i+1} - x_{n-2} x_{n-1} - x_{n-2} x_n \end{cases}$$

On remarque que si l'on note \tilde{q} la forme de Tits associée au diagramme A_{n-1} , on a :

$$\forall x \in \mathbb{Z}^n, q(x_1, \dots, x_n) = \tilde{q}(x_1, \dots, x_{n-1}) + x_n^2 - x_{n-2} x_n = \tilde{q}(x_1, \dots, x_{n-2}, x_n) + x_{n-1}^2 - x_{n-2} x_{n-1}$$

Ainsi, si l'on fixe $x_n = 0$ ou $x_{n-1} = 0$, les racines de A_{n-1} nous donnent les racines de D_n dont l'une des deux dernières coordonnées est nulle. Au total, en prenant en compte les redondances, on en obtient donc $\frac{(n-1)n}{2} + n - 1$ positives.

Supposons maintenant que l'on dispose d'une racine positive (x_1, \dots, x_n) dont les deux dernières coordonnées sont non nulles. On peut écrire la forme q de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 q(x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{2} \left(x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-3} (x_i - x_{i+1})^2 \right) + \frac{1}{2} x_{n-2}^2 + x_{n-1}^2 + x_n^2 - x_{n-2} x_{n-1} - x_{n-2} x_n \\
 &= \frac{1}{2} \left(x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-3} (x_i - x_{i+1})^2 + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_{n-2} - x_{n-1} - x_n)^2 \right) = 1
 \end{aligned}$$

Par hypothèse, on a $x_{n-1}, x_n \geq 1$, donc $x_{n-2} \in \{1, 2\}$, puisque $|x_{n-2} - x_{n-1} - x_n| \leq 1$, et puisque les coordonnées de x sont majorées par 2 (d'après la remarque du théorème 3.2.7).

Si $x_{n-2} = 1$, la quantité $|x_{n-2} - x_{n-1} - x_n|$ vaut nécessairement 1, donc $x_{n-1} = x_n = 1$. Dès lors, la quantité $x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-3} (x_i - x_{i+1})^2$ est égale à 1. L'étude du cas A_n nous montre que x est de la forme $(0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 1, 1, 1)$, soit $n - 2$ possibilités.

Si $x_{n-2} = 2$, une analyse similaire au cas A_n nous montre que la quantité $x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-3} (x_i - x_{i+1})^2$ vaut au moins 2 (et est donc égale à 2). Ainsi, $x_{n-2} - x_{n-1} - x_n = 0 = x_n - x_{n-1}$. Le vecteur x est donc nécessairement de la forme $(0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 1, 2, \dots, 2, 2, 1, 1)$, soit $\frac{(n-3)(n-2)}{2}$ possibilités.

On vérifie facilement que tous les vecteurs donnés sont bien des racines positives. On en a donc au total $n(n-1)$.

Dans le cas où $n = 4$, pour le carquois avec l'orientation donnée précédemment, les racines positives associées sont donc au nombre de douze, avec d'une part les racines analogues au cas A_3 (en fixant successivement la première, la troisième et la quatrième coordonnée égale à 0), et d'autres racines plus exotiques : $(1, 1, 1, 1)$ et $(1, 2, 1, 1)$ (où l'on voit apparaître une coordonnée égale à 2). On a croisé la représentation correspondant à ce dernier vecteur dimension dans l'exemple 2.2.2, c'est l'image par le foncteur C^+ de la représentation injective $I(1)$.

— Dans le cas des graphes E_6, E_7 et E_8 , on peut dénombrer algorithmiquement les racines, grâce à la remarque du théorème 3.2.7. Une implémentation en Python est présentée en annexe.

Les calculs nous donnent respectivement 36, 63 et 120 racines positives pour les graphes E_6, E_7 et E_8 , et l'on note dans ces trois cas que la borne donnée par le théorème 3.2.7 est optimale (au moins une racine a un coefficient égal à cette borne).

4.2 Le cas Euclidien

Lemme 4.2.1 Soit Q un carquois de type euclidien et $x \in \mathbb{Z}^n$. Il existe un entier h tel que c^h soit l'identité sur $\Delta/N(q)$.

- i. Si pour tout $r \in \mathbb{Z}$, $c^r(x) > 0$, alors $c^h(x) = x$.
- ii. Si $c^h(x) = x$, alors $\langle \delta, x \rangle = 0$.

Preuve. La démonstration est similaire à celle du lemme 4.1.1, en utilisant en plus le lemme 2.3.5.



Définition 4.2.2 (Défaut) Soit Q un carquois de type euclidien. Le défaut ∂x d'un vecteur $x \in \mathbb{Z}^n$ est la quantité :

$$\partial x = \langle \delta, x \rangle = -\langle x, \delta \rangle$$

Le défaut ∂X d'une représentation X est alors le défaut de son vecteur dimension.

Théorème 4.2.3 (Caractérisation des représentations par le défaut) Soit Q un carquois euclidien et X une représentation indécomposable.

- i. X est préprojective si et seulement si $\partial X < 0$.
- ii. X est préinjective si et seulement si $\partial X > 0$.
- iii. X est régulière si et seulement si $\partial X = 0$.

Preuve. D'après le lemme 2.2.4, si la représentation X est telle que $C^r(X) \neq 0$ pour un entier r , alors on a l'égalité : $\dim C^r(X) = c^r(\dim X)$.

Si X est préprojective, il existe un sommet i et un entier négatif r tel que : $X = C^r P(i)$. Par le lemme 2.3.5, on déduit que :

$$\partial X = -\langle c^r(\dim P(i)), \delta \rangle = -\langle \dim P(i), \delta \rangle = -\delta_i < 0$$

On raisonne de même dans le cas où X est une représentation préinjective. En utilisant successivement les points i. et ii. du lemme 4.2.1, on déduit que si X est régulière, alors $\partial X = 0$.



Théorème 4.2.4 Soit Q un carquois sans cycle orienté dont le graphe sous-jacent est de type euclidien. Alors l'application $X \mapsto \dim X$ induit une bijection entre les classes d'isomorphisme des représentations préinjectives et préprojectives indécomposables de Q et les racines positives de défaut non nulles associées au graphe sous-jacent de Q .

Les représentations préinjectives et préprojectives indécomposables forment $2n$ familles infinies dénombrables de représentations deux à deux non indécomposables, les $(C^{-r}(P(i)))_{r \in \mathbb{N}}$ et les $(C^r(I(i)))_{r \in \mathbb{N}}$, où i est un sommet de Q .

Preuve. Supposons que $1, \dots, n$ est un ordre admissible de Q et donnons-nous X une représentation indécomposable de Q de vecteur dimension x .

Si X est préprojective, disons isomorphe à $C^r(P(i))$, alors $\dim P(i) = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_{i-1}(e_i)$ et donc $x = C^r \circ \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_{i-1}(e_i)$. C'est donc bien une racine positive de défaut négatif strictement par le théorème 4.2.3. On conclue de manière similaire si X est préinjective.

L'application $X \mapsto \dim X$ est bien injective sur les représentations préinjectives et préprojectives indécomposables par le théorème 2.4.3.

Si maintenant x est une racine positive de défaut non nul, la contraposée du lemme 4.2.1 nous indique qu'il existe un entier $t \neq 0$ tel que $C^t(x)$ est non positif. Dans le cas où t est strictement positif, on peut comme dans la preuve du théorème 4.1.2 se donner un couple d'entiers (r, s) minimaux et une application τ telle que $\tau(x)$ n'est pas positif. D'après le lemme 3.2.9, $\sigma_s \circ \tau(x) = e_s$.

De manière analogue à la preuve du théorème 4.1.2, la représentation $X = C^{-r}(P_s)$ est préprojective et son vecteur dimension est x . La représentation obtenue est préinjective dans le cas où t est négatif.

Montrons maintenant le deuxième point du théorème. En utilisant le théorème 2.4.3, il nous suffit de montrer que les suites $(C^{-r}(P(i)))_{r \in \mathbb{N}}$ et $(C^r(I(i)))_{r \in \mathbb{N}}$ ne s'annulent jamais. Ce n'est pas le cas, puisque si l'on avait $C^{-r}(P(i)) = 0$, le théorème 2.4.1 nous indique $C^{-r-1}(P(i)) \cong I(j)$ pour un sommet j . Dès lors, $P(i)$ serait préinjectif et est donc de défaut à la fois strictement négatif et positif, ce qui est impossible. On raisonne de même pour les suites de préinjectifs.



Exemple 4.2.5 Le carquois de Kronecker est sans cycle orienté et a pour graphe sous-jacent le diagramme euclidien \tilde{A}_1 :

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} 2$$

La forme de Tits associée au carquois de Kronecker est l'application $(x, y) \mapsto (x - y)^2$. Dès lors, les racines positives sont exactement les :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(n + 1, n + 1), (n, n + 1), (n + 1, n)\}$$

Le vecteur δ est ici $(1, 1)$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\langle \delta, (n + 1, n + 1) \rangle = (n + 1 + n + 1) - (n + 1 + n + 1) = 0$. Les racines de la forme $(n + 1, n + 1)$ sont donc de défaut nul.

En outre, $\langle \delta, (n, n + 1) \rangle = (n + n + 1) - (n + 1 + n + 1) = -1 < 0$ et $\langle \delta, (n + 1, n) \rangle = 1 > 0$. Ceci correspond bien aux calculs des représentations préinjectives et préprojectives faits dans la deuxième partie de l'exemple 2.4.4.

On ne peut cependant a priori rien dire des autres classes de représentations indécomposables. Dans le cas du carquois de Kronecker, on peut cependant déterminer toutes les classes d'isomorphismes des représentations indécomposables, et démontrer que leurs vecteur dimension sont donnés par les racines positives. Il n'y a cependant pas de bijection, car les représentations "manquantes" (non préinjectives ou préprojectives) sont exactement les représentations suivantes, deux à deux non isomorphes :

$$k^n \begin{array}{c} \xrightarrow{J(n, \lambda)} \\ \xrightarrow{\text{Id}} \end{array} k^n \quad \text{et} \quad k^n \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Id}} \\ \xrightarrow{J(n, 0)} \end{array} k^n$$

Où λ décrit k et $J(n, \lambda)$ est l'endomorphisme correspondant au bloc de Jordan de taille n et de valeur propre λ .

Nous ne le démontrerons cependant pas.

Lemme 4.2.6 Soit Q un carquois dont le graphe sous-jacent est de type $\tilde{A}_n, n \geq 0$. Alors Q possède une infinité de classes d'isomorphisme de représentations indécomposables.

Preuve. Dans le cas où Q est sans cycle orienté, le résultat est un corollaire du théorème précédent. Sinon, on a exhibé une infinité de représentations irréductibles (et donc indécomposables) non-isomorphes dans le premier point de l'exemple 1.1.7.



Théorème 4.2.7 (Théorème de Gabriel) Soit Q un carquois connexe. Il existe un nombre fini de classes d'isomorphisme de représentations indécomposables si et seulement si le graphe sous-jacent de Q est de type Dynkin.

Preuve. Si Q est de type Dynkin, le précédent théorème de Gabriel nous montre qu'il existe un nombre fini de classes d'isomorphisme de représentations indécomposables. Sinon, Q possède un sous-carquois Q' de type euclidien, qui possède un nombre infini de classes d'isomorphisme de représentations indécomposables, d'après le théorème et le lemme précédents. Il est alors facile de construire pour chaque représentant d'une classe de représentations indécomposables de Q' une représentation indécomposable de Q , en fixant les arêtes et les sommets manquants égaux à 0. Les représentations obtenues sont bien deux à deux non-isomorphes, ce qui permet de conclure.



Remarque. La classification donnée par le théorème de Gabriel ne dépend pas de l'orientation des carquois, mais seulement de leur graphe sous-jacent !

5 Annexes

5.1 Un peu de théorie des catégories

Définition 5.1.1 (Catégorie) Une catégorie \mathcal{C} est la donnée :

- i. d'une collection d'objets, notée $\text{Ob}(\mathcal{C})$
- ii. pour tous objets A, B , d'une collection $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ de morphismes de A vers B .
- iii. pour tous objets A, B, C , d'une loi de composition \circ de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ vers $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$, satisfaisant les propriétés suivantes :
 - (a) Pour tout objet A , il existe un morphisme id_A de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ tel que pour tout objet B , pour tout morphisme f de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$, $f \circ \text{id}_A = f$ et pour tout morphisme g de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $\text{id}_A \circ g = g$.
 - (b) La composition est associative, lorsqu'elle est bien définie.

Exemple 5.1.2

- Les groupes et les morphismes de groupes forment une catégorie, parfois notée Grp .
- Pour un corps k , les k -espaces vectoriels et les applications k -linéaires forment une catégorie, notée $k - \text{Ev}$
- On peut voir un groupe fini G comme une catégorie, dont le seul objet est G , et dont les morphismes sont les éléments du groupes, munis de la loi interne de G .
- Un carquois Q peut lui aussi être vu comme une catégorie, dont les objets sont les sommets de Q_0 , et dont les morphismes sont les chemins (y compris le chemin vide), munis de la concaténation.

Définition 5.1.3 (Foncteur) Étant donné deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{C}' , un foncteur de \mathcal{C} vers \mathcal{C}' est la donnée :

- i. d'une application, qui à tout objet A de \mathcal{C} , associe un objet $F(A)$ de \mathcal{C}'
- ii. d'une application, qui à tout morphisme f de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ associe un morphisme $F(f)$ de $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(A), F(B))$, vérifiant :
 - (a) pour tout objet A de \mathcal{C} , $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$
 - (b) pour tous objets A, B, C et tous morphismes $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Exemple 5.1.4

- Si \mathcal{C} est la catégorie des corps (commutatifs) et Ann celle des anneaux (unitaires), on dispose pour tout entier n d'un foncteur \mathcal{M}_n de \mathcal{C} vers Ann :
 - i. qui à un corps k associe l'anneau $\mathcal{M}_n(k)$
 - ii. qui à un morphisme de corps $f : k \rightarrow k'$ associe le morphisme d'anneaux de $\mathcal{M}_n(k)$ dans $\mathcal{M}_n(k')$, qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(k)$ associe la matrice $M' = (f(m_{ij}))_{i,j}$ de $\mathcal{M}_n(k')$
- Pour un corps k , une représentation linéaire (E, ρ) d'un groupe fini G peut être vue comme un foncteur F de la catégorie associée à G vers la catégorie $k - \text{Ev}$, défini par :
 - i. $F(G) = E$
 - ii. $\forall g \in G, F(g) = \rho(g)$

Le fait que ρ soit un morphisme de groupes nous garantit que F est bien un foncteur (et réciproquement, si l'on définit un foncteur F de la catégorie de G dans $k - \text{Ev}$, l'application ρ obtenue est bien un morphisme de groupes).
- Étant donné un corps k et un carquois $Q = (Q_0, Q_1)$, une k -représentation $X = (X_i, X_\alpha)$ de Q peut également être vue comme un foncteur F de la catégorie associée à Q vers la catégorie $k - \text{Ev}$, défini par :
 - i. Pour tout sommet i , $F(i) = X_i$.
 - ii. Pour tout chemin $c = \alpha_r \cdots \alpha_1$, $F(c) = X_{\alpha_r} \circ \dots \circ X_{\alpha_1}$.

Réciproquement, un foncteur nous donne bien une k -représentation de Q . Les représentations de groupes et les représentations de carquois sont donc deux cas particuliers d'un même objet : les foncteurs vers la catégorie $k - \text{Ev}$.

5.2 Code Python

```

1 import numpy as np
2
3 def A(n) : #la forme de Tits associee au diagramme A_n
4     return (2*np.diag(np.ones(n)) - np.diag(np.ones(n-1), 1) - np.diag(np.ones(n-1), -1))/2
5
6 def D(n) : #le diagramme D_n
7     Dn = (2*np.diag(np.ones(n)) - np.diag(np.ones(n-1), 1) - np.diag(np.ones(n-1), -1))/2
8     Dn[n-2, n-1] = 0
9     Dn[n-1, n-2] = 0
10    Dn[n-3, n-1] = -1/2
11    Dn[n-1, n-3] = -1/2
12    return Dn
13
14 global E6 #le diagramme E_6
15 E6 = (2*np.diag(np.ones(6)) - np.diag(np.ones(5), 1) - np.diag(np.ones(5), -1))/2
16 E6[2, 4] = -1/2
17 E6[4,2] = -1/2
18 E6[3, 4] = 0
19 E6[4, 3] = 0
20
21 global E7 #le diagramme E_7
22 E7 = (2*np.diag(np.ones(7)) - np.diag(np.ones(6), 1) - np.diag(np.ones(6), -1))/2
23 E7[2, 4] = -1/2
24 E7[4,2] = -1/2
25 E7[3, 4] = 0
26 E7[4, 3] = 0
27
28 global E8 #le diagramme E_8
29 E8 = (2*np.diag(np.ones(8)) - np.diag(np.ones(7), 1) - np.diag(np.ones(7), -1))/2
30 E8[2, 4] = -1/2
31 E8[4,2] = -1/2
32 E8[3, 4] = 0
33 E8[4, 3] = 0
34
35 #On calcule la forme de Tits associee a Q en X :
36
37 def q(Q, X) :
38     return (X.T).dot(Q.dot(X))
39
40 #La fonction permettant de visiter tous les vecteurs positif
41 #de  $Z^n$  de coefficients inferieurs a b-1 :
42
43 def incr_base(X, n, b) :
44     i = 0
45     while i < n and X[i] == b-1 :
46         X[i] = 0
47         i+=1
48     if i < n :
49         X[i] +=1
50     return X
51
52 #Calcul de la liste R des racines positives associees au graphe Q a n sommets
53 #et dont les coefficients sont majores par b-1 :
54
55 def racines(Q, b) :
56     n = len(Q)
57     R = []
58     X = np.zeros(n)
59     for i in range (b**n-1) :
60         X = incr_base(X, n, b)
61         X_ = X.copy()
62         if q(Q, X) == 1 :
63             R.append(X_)
64     return (len(R), R)

```

Bibliographie

- [Ben91] David J. BENSON. *Representations and Cohomology*. T. 1. Cambridge University Press, 1991.
- [Ber12] Grégory BERHUY. *Modules : Théorie, pratique... et un peu d'arithmétique*. Calvage et Mounet, 2012.
- [Kra10] Henning KRAUSE. *Representations of quivers via reflection functors*. 2010. arXiv : 0804.1428 [math.RT].
- [Sch14] Ralf SCHIFFLER. *Quiver Representations*. CMS Books in Mathematics. Springer International Publishing, 2014.